التقنيات الكمية في ادارة الاعمال

(محاضرات وتمارين)

الدكتورة
مفيدة يحياوي



اليازوري
www.yazori.com

التقنيات الكمية في ادارة الاعمال
الدكتورة
مفيدة يحياوي
اليازوري

التقنيات الكمية في إدارة الإعمال

محاضرات وتمارين

الجزء الأول

إعداد الدكتورة
مفيدة يحياوي
أستاذة محاضرة /قسم علوم التسيير
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
جامعة بسكرة- الجزائر

المحتويات

الطرق المتبعة
لمواجهة مشاكل التسيير

التقنيات الكمية في التسيير هي، قبل كل شيئ، تقنيات نظامية وعلمية تخص مجال التسيير. هدف هذه التقنيات تحليل ومعالجة المشاكل التي تعترض المؤسسات والتنظيمات عموما وذلك لإتخاذ القرار المناسب.

فهي تسمح بالإجابة على تساؤلات كثيرة منها هل مشروع الإستثمار ذو مردودية؟ في أي تاريخ يمكن إطلاق سلسلة من المنتوج (س)؟ كيف يمكن تنظيم مصلحة أو عدة مصالح داخل المؤسسة؟ ما هي كميات الإنتاج المثلى؟ وغيرها.

توجد عدة طرق تساعد في حل مشاكل التسيير اليومية واتخاذ القرارات المناسبة، من بينها:

- استعمال الخبرة السابقة للمسير التي تعكس تجاربه السابقة، لها أهمية بالغة في مساعدة المسير في اتخاذ بعض القرارات أو معالجة بعض المشاكل، إلا أنه قد لا يستطيع الإعتماد على تجاربه نظرا لإختلاف الظروف.
- طريقة الملاحظة والرصد، إلا أن هذه الطريقة تعتمد على قدرة المسير على الإلمام والإطلاع على كل التفاصيل التي تحدث بالمؤسسات المشابهة لمؤسسته ليستطيع الإستفادة من تجاربها وهذا يعتمد على دبلوماسيته ومقدرته على جمع المعلومات حول المؤسسات.
- تطبيق الدراسات النظرية، وهنا يستعين المسير بالكتب التي تتناول مشاكل مشابهة.

- الطريقة العلمية، وهي من أفضل الطرق وتستوجب تكوين المسير حيث يكون مختصا في مجال الإدارة والتسيير، فيكون إلمامه بمختلف الطرق العلمية التي يستند إليها في اتخاذ قراراته.
- الإستعانة بمكاتب الدراسات المتخصصة في حالة عدم اختصاصه أو تعذر عليه إيجاد الحل.

الفصل الأول

عملية التنبؤ في الأجل القصير

عملية التنبؤ في الأجل القصير

بما أن التنبؤ هو العملية التي تسبق كل قرار، فانه سيكون الممهد للتقنيات الكمية وهذا ما سنتناوله في الفصل الأول. فلا بد من استخدام طرق إحصائية للتغلب على الظواهر العشوائية والموسمية والدورية التي قد تؤدي إلى تشويه التنبؤ.

يتم التنبؤ في كل وظائف المؤسسة؛ إنتاجية، مالية، تسويقية، تموينية وموارد بشرية. وهو عملية تتم على كل المستويات الزمنية(القصير،المتوسط والطويل).

فهو يتم بطريقة مستمرة ومتكررة، إلا أن التنبؤ بالمبيعات يبقى هو المتميز والأكثر أهمية في المؤسسة. فيعتبر التنبؤ بالمبيعات أساسا تنطلق منه كل وظائف المؤسسة في تنبؤاتها ووضع خططها. لذا نجده يحتل مكانة مهمة واهتماما كبيرا سواء من طرف المسيرين أو من طرف الباحثين.

يعتبر التنبؤ بالمبيعات لفترة زمنية مقبلة هو الخطوة الرئيسية الأولى التي لا بد على المسؤولين في المؤسسة من القيام بها باعتباره الأساس لتخطيط أوجه الأنشطة على اختلاف أنواعها في المؤسسة مثل النشاط الإنتاجي، التمويلي والخاص بالأفراد والتموينات. والغرض الرئيسي من التنبؤ بالمبيعات هو الوصول إلى رقم المبيعات التقديرية عن فترة زمنية مستقبلية في السوق.

لا يمكن القيام بتنبؤات دقيقة إذا لم نحصل على نظام دقيق لجمع المعلومات ونقوم بتحليل المعطيات وبدراستها. فيجب أولا التعرف على طبيعة المتغيرات بغية الحصول على نماذج تقديرية أكثر دلالة وأكثر واقعية. فهناك المتغيرات الظرفية، متغيرات على المدى القصير، على المدى الطويل...وغيرها(variables conjoncturelles)، variables relatives a (la tendance)...

هناك عدة طرق كمية ونوعية يمكن الاستعانة بها عند القيام بالتنبؤ بالمبيعات. بينما تعتمد الأساليب الكمية على أنماط أو علاقات تظهر على شكل سلاسل زمنية، تعتمد الأساليب الكيفية بالدرجة الأولى على الاجتهاد الشخصي، وهذا الاجتهاد الشخصي الشائع في التنبؤ الكيفي يتمثل في الحصول على آراء ووجهات النظر لعدد كبير من الخبراء من داخل وخارج المؤسسة، وفي بعض الحالات وخاصة تلك التي تتعلق بالتنبؤ بعيد المدى يمكن أن يأتي التنبؤ الكيفي في أعقاب التنبؤ الكمي. ولهذه الطرق والتقنيات مزايا وعيوبا حيث بعد تطبيقها لا بد من المتابعة والمراجعة عند الضرورة، أي اللجوء إلى المعلومات المخزنة لدى المؤسسة لاختبارها واكتشاف طبيعة تطورها. ونذكر من هذه الطرق؛

أولا: الطرق النوعية أو الكيفية

التي تعتمد على أساليب لا تستخدم البيانات التاريخية العددية، وهي تطبق في الحالات التي تكون فيها البيانات العددية غير متاحة أو يكون التنبؤ المطلوب للمدى البعيد جدا. وإننا لا نتطرق إليها بإسهاب لأنها تعتبر موضوع التسويق ونذكر منها على سبيل المثال؛

طريقة دلفي:

هذا الأسلوب شائع الاستخدام في التنبؤ التكنولوجي والتنبؤ بعيد المدى. يتكون أساسا من فريق من الخبراء يبدون آراءهم وتصوراتهم للنتائج الممكنة. يتواجد هؤلاء الخبراء في أماكن مختلفة ويكون استجوابهم عن طريق استقصاءات متتابعة حيث تستخدم إجابة استقصاء في عمل الاستقصاء التالي، وأي مجموعة من المعلومات تكون متاحة لبعض الخبراء دون غيرهم يتم إرسالها للخبراء الآخرين حتى يكونوا جميعا على نفس القدر من المعلومات. فيتم الحصول على آراء فردية

بطرق منفصلة ثم محاولة التوفيق بينها. وتتكرر هذه العملية حتى يصبح هناك إجماعا على رأي يستخدم كتنبؤ للمستقبل.

- طريقة مسح السوق:

أصبحت الآن أبحاث السوق وسلوك المستهلك متقدمة جدا. كما أصبحت البيانات المتحصل عليها بمثابة مدخلات قيمة إلى أقصى حد تمكن من التكهن بطلب السوق. وتشمل هذه الطرق بصفة عامة استخدام الإستقصاء واجتماعات مع المستهلكين واختبار السلع والخدمات الجديدة.

طريق تحليل التماثل التاريخي ودورة الحياة:

يمكن استكمال دراسات أبحاث السوق بالرجوع إلى الأداء السابق للسلعة او الخدمة محل الدراسة وذلك باستخدام منحنى تحليل دورة حياة السلعة المعروف في دراسات التسويق.

- تنبؤ قاعدة الحوار:

تستخدم هذه الطريقة حوارات مستقبلية متعددة للوصول إلى خطط بديلة. والخطوة الأولى في هذه الطريقة هي تعريف المتغير المطلوب تخطيطه ، أما الخطوة الثانية فتتمثل في تحديد العوامل المتعددة التي تؤثر في المتغير الذي حددناه في الخطوة السابقة. فيتم ذلك باستشارة خبراء والانتفاع ببيانات تاريخية. يتغير إسقاط المتغير الأول مع مجموعة العوامل المفترضة، وهذا ما يسمى بالحوار. ويهتم المدير بحوارات المستقبل الأكثر احتمالا بالحدوث.

- آراء رجال البيع:

تقوم هذه الطريقة على أساس سؤال رجال البيع عن تقديراتهم المستقبلية عن اتجاه المبيعات في المنطقة التي يتولى البيع فيها. ومن الطبيعي أن يتأثر هؤلاء الأشخاص بآرائهم الشخصية وبرد فعل المستهلك اتجاه المنتج، فمنهم المتفائل والمحافظ والواقعي. لذا تحتاج

تقديراتهم للتعديل ومن ثمة تعطى إلى لجنة مسؤولية عن وضع التنبؤ النهائي.

ثانيا: الطرق الكمية ويوجد العديد منها ونذكر على سبيل المثال فقط:

طريقة المتوسطات المتحركة:

الهدف من استخدام المتوسطات بدلا من الأرقام الحقيقية السنوية هو محاولة تقليل أثر التغيرات الفجائية حيث أن حساب المتوسط العام لمجموعة من السنوات لحجم ظاهرة ما يعني توزيع أثر التغيرات الفجائية التي حدثت وأثرت على هذه الظاهرة في سنة من السنوات وبالتالي تكون البيانات المستخلصة أكثر دقة في تمثيل الإتجاه العام لحركة هذه الظاهرة.

تحتاج هذه الطريقة إلى خطوتين بسيطتين لإجراء التنبؤ للفترة التالية من بيانات ماضية، هما:

1. اختيار عدد الفترات التي ستحسب لها المتوسطات المتحركة، ويطلق على هذا العدد(N) "رتبة المتوسط المتحرك". والملاحظ أنه سيكون لقيم (N) الأكبر أثر تمهيد أعظم على التقلبات العشوائية. وتؤكد قيم (N) الأصغر تاريخ الطلب الأكثر حداثة. ونلاحظ أنه ستنتج عن (N=1) أن يصير طلب الفترة الحالية هو تنبؤ الفترة التالية.
2. الحصول على الطلب المتوسط لفترات "ن" الأكثر حداثة، ويصبح هذا الطلب المتوسط بمثابة تنبؤ الفترة التالية.

لكن ما يعاب على هذه الطريقة أنها تتطلب تخزين البيانات لفترات (N) لكل عنصر من العناصر المراد التنبؤ بها. إن متطلبات التخزين هذه ستكون هامة. وأكثر من ذلك، فإن هذه الطريقة لن توفر تنبؤات جيدة إذا عكست الظاهرة المراد التنبؤ لها مكونات الاتجاه أو الموسمية. فعلى سبيل المثال إذا كان هناك اتجاه صاعد في البيانات، عندئذ فإن التنبؤ الذي يستخدم طريقة المتوسطات المتحركة يقلل من الظاهرة الفعلية.

مثال توضيحي:

استقبلت كلية العلوم الإقتصادية وعلوم التسيير طلبات التسجيل التالية خلال الخمس سنوات الأخيرة كما يلي:

السنوات	عدد الطلبات
2000	3440
2001	3610
2002	3500
2003	3650
2004	3800

ما هو عدد طلبات التسجيل المقدرة لسنة 2005 باستعمال طريقة المتوسطات المتحركة اعتمادا على 3، 4 و 5 سنوات ؟

الحل:

- طريقة المتوسطات المتحركة بالإعتماد على 3 سنوات=

$$\frac{3500+3650+3800}{3} = 3650 = Pr2005$$

- طريقة المتوسطات المتحركة بالإعتماد على 4 سنوات=

$$\frac{3610+3500+3650+3800}{4} = 3640 = Pr2005$$

- طريقة المتوسطات المتحركة بالإعتماد على 5 سنوات=

$$\frac{3440+3610+3500+3650+3800}{5} = 3600 = Pr2005$$

-طريقة المتوسطات المتحركة المرجحة:

قد تكون المتوسطات المتحركة بسيطة كما ذكرنا أعلاه أو مرجحة بأوزان معينة. يمكننا تعديل طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة بتعيين ترجيح مختلف لكل فترة سابقة.

ففي هذه الطريقة، نحاول أن نبين أن البيانات التي نعتمد عليها للقيام بالتنبؤ ليست بنفس الأهمية، وبالتالي نحملها أوزانا مختلفة، من خلال إعطائها معاملات معينة، مثلا:

الشهر	الطلب الفعلي	التنبؤ 1	التنبؤ 2	التنبؤ 3
1	100	-	-	-
2	90	-	-	-
3	105	-	-	-
4	110	98	100	102
5	80	102	105	107
6	105	98	94	89
7	95	98	99	101
8	105	97	95	96
9	100	102	102	103
1	110	100	101	101
0	115	105	106	108
1	120	108	111	114
1	130	115	117	118
1	135	122	124	127
2				
1				
2				

- لقد تم التنبؤ (1) من تطبيق المتوسطات المتحركة برتبة 3 .

أما في التنبؤ(2) فقد تم تحميل المعطيات التي يتم بها حساب المتوسطات المتحركة بأوزان 50%, 30%, 20%.

ولكن الملاحظ أن هذه الأوزان قد ضخمت النتائج في بعض الأحيان، وبالتالي، نقترح وزنا أهما بالنسبة للمعطيات الحديثة، مثلا تكون الأوزان التي يتم بها حساب المتوسطات المتحركة المرجحة هي 70%, 20%, 10%.

وتظهر النتائج الخاصة بالنتائج الجديدة في عمود التنبؤ(3).

- نماذج الانحدار

تمثل نماذج الانحدار أحد الأساليب الإحصائية المهمة في عملية التنبؤ بالمبيعات، ويساعد هذا الأسلوب على تبسيط الظواهر المدروسة في شكل معادلات، ويهتم بدراسة العلاقة السببية بين متغيرات اقتصادية. يوجد العديد من نماذج الانحدار، نقتصر على توضيح واستعمال نوعين منها:

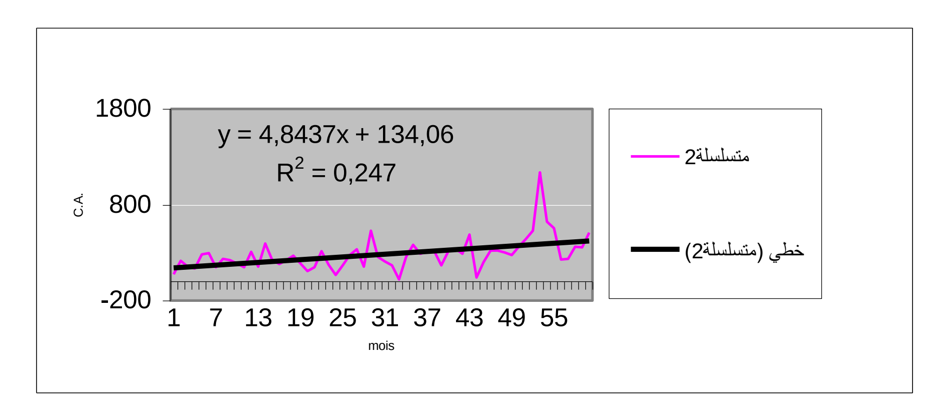
▫ نموذج الانحدار البسيط:

يعتبر من أبسط النماذج وأكثرها استعمالا نظرا لكونه يدرس العلاقة الموجودة بين متغير تابع ومتغير مستقل واحد فقط. تكون العلاقة بين المتغير التابع(Y) والمتغير المستقل(X) علاقة خطية وتكتب كما يلي:

$$\mathbf{Y= aX + b}$$

حيث: يرمز "Yi" إلى قيمة المشاهدة الخاصة بالمتغير التابعY.

ويرمز " Xi" إلى قيمة المشاهدة الخاصة بالمتغير المستقل X.



يتم تقدير العناصر a و b من خلال المعادلات المعطاة بواسطة طريقة المربعات الصغرى.

طريقة المربعات الصغرى:

عندما يتم تمثيل المعطيات المشاهدة بيانيا بواسطة خط مستقيم، يمكن توضيح قيمتين للمتغير التابع y هما:

- القيمة المشاهدة.
- القيمة المقدرة للنموذج التي يتم الحصول عليها من خلال؛ $\hat{Y} = aX_i + b$

.

الخط المستقيم الذي يقطع منتصف المجموعة النقطية يعرف بأنه الخط الذي من أجله يكون مجموع الإنحرافات $(Y-\hat{y})$ في أدنى قيمتها. ويساوي مجموع قيم الإنحرافات $(E2)$ مجموع مربع الفوارق بين القيم المشاهدة والقيم المقدرة، أي:

$$E_2=\sum(Y-\hat{Y}_i)^2$$

أي يتعلق الأمر، في مثل هذه الحالات، بتحديد قيم b,a للمستقيم الذي يجعل قيمة E في حدها الأدنى:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n}(yi - axi - b)^2$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل:

$$E^2 = \sum y^2 + a^2\sum x^2 + nb^2 0 - 2a\sum xy - 2b\sum y + 2ab\sum x$$

يمكن استخراج قيم b,a من المعادلات التالية:

$$\delta E^2 / \delta a = 2a\sum x^2 - 2\sum xy + 2b\sum x = 0$$

$$\delta E^2 / \delta b = 2nb - 2\sum xy + 2a\sum x = 0$$

والتي تعطينا، أيضا، مجموعة المعادلات التالية:

$$\sum y = nb + a\sum x$$

$$\sum xy = b\sum x + a\sum x^2$$

والتي نستنتج منها القيم المثالية للإنحدار الخطي:

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

حيث $\bar{x}$ و $\bar{y}$ على التوالي متوسط x_i و y_i.

في الجدول الموالي تمثل الأعمدة من (1-5) تفاصيل الحسابات الضرورية للحصول على قيمة a . نفس النتيجة يمكن الحصول عليها وذلك بضرب متوسط رقم العمود(9)، الذي يمثل التباين المتعدد لـ x و y مع متوسط قيمة العمود (7) الذي يمثل تباين x.

حساب مؤشرات خط الإنحدار

I (1)	X_i (2)	Y_i (3)	X_iY_i (4)	X_i^2 (5)	$Xi-\bar{X}$ (6)	$(Xi-\bar{X})^2$ (7)	$Y-\bar{Y}$ (8)	$(X-\bar{X})(Yi-Y)$ (9)
1	2	23	46	4	-6	36	-13	78
2	3	27	81	9	-5	25	-9	45
3	5	28	140	25	-3	9	-8	24
4	9	39	351	81	1	1	3	3
5	10	39	390	100	2	4	3	6
6	12	45	540	144	4	16	9	36
7	15	51	765	225	7	49	15	105
مجموع	56	252	2313	588	0	140	0	297
متوسط	8	36	330.4	84	0	20	0	42.4

كما يمكن تحديد a بطريقة أخرى من خلال العلاقة التالية:

$$a=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}=\frac{(1/2)\sum(x-\bar{x})(yi-\bar{y})}{(1/2)\sum(xi-\bar{x})^2}$$

بالتعويض ، نجد:

$$a=\frac{\sum xy-n\overline{xy}}{\sum x^2-n\bar{x}^2}=\frac{2313-(7)(8)(36)}{588-(7)(64)}=2.12$$

$$a=\frac{\operatorname{cov}(c,y)}{\operatorname{var}(x)}=\frac{\delta xy}{\delta x^2}=\frac{42.4}{20}=2.12$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} = 36 - 2.12 * (8) = 19$$

فمعادلة المستقيم هي:

$$y = 2.12x + 19$$

يتم استعمال هذه المعادلة للقيام بالتنبؤات للمتغير التابع (y) كلما ظهرت كميات أخرى من المتغير(x).

معامل الإرتباط البسيط:

معامل الإرتباط البسيط r بين x و y معطى بالعلاقة التي تستخدم المتغيرات المركزة:

$$x_i = x_i - \overline{x}$$
$$y_i = y_i - \overline{y}$$
$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$

يكون الارتباط قويا بين المتغيرين x و y كلما كان قريبا من الواحد.

الإختبارات لتأكيد مدى صحة النمذجة:

ولكن ينبغي التأكد من صحة تمثيل المشاهدة من خلال النموذج المقترح قبل أن نأخذ بعين الإعتبار هذه النتائج.

هناك العديد من الإختبارات لتأكيد مدى نمذجة هذه المشاهدة وتتمحور حول نقطتين أساسيتين:

- إلى أي مدى يمثل خط الإنحدار هذه الظاهرة محل الدراسة؟
- إلى أي مدى يمكن الوثوق في معاملات النموذج a و b ؟

المشاهدة	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$Y_i - \overline{Y}$	$(Y_i - \overline{Y})^2$	$\hat{Y}_i - \overline{y}$	$(\hat{Y}_i - \overline{y})^2$	$y_i - y_i$	$(y_i - y_i)^2$
1	2	23	23.27	-13	169	-	162	0.27	0.07

						12.73			
2	3	27	25.39	-9	81	-10.61	112.57	-1.61	2.59
3	5	28	29.64	-8	64	-6.36	40.45	1.64	2.69
4	9	39	38.12	3	9	2.12	4.49	-0.88	0.77
5	10	39	40.24	3	9	4.24	17.98	1.24	1.54
6	12	45	44.49	9	81	8.49	72.08	-0.51	0.26
7	15	51	50.85	15	225	14.85	220.52	-0.15	0.02
مجموع	………………………..				638		630.09		7.94

من خلال هذه النتائج نلاحظ أن مقدار التشتت الإجمالي هو في العمود السادس (بقراءة الجدول من اليسار إلى اليمين) هو 638 بينما مقدار التشتت هو في آخر عمود أي 7.94 أي أن الخطأ المرتبط بالنموذج المتحصل عليه ضعيف جدا.

النموذج المتجه نحو الداخل: le modèle endogène

يمكن اعتبار **النموذج المتجه نحو الداخل** نموذجا خاصا من نماذج الانحدار البسيط. ان النماذج المتجهة نحو الداخل لا تأخذ بعين الاعتبار الا متغيرا واحدا فقط وهو **عنصر الزمن**.

بالتالي يكون الشكل العام للنموذج هو: **Yt = at + b**

<u>مثال توضيحي</u>

t^2	$t(Y_t)$	Y_t	t	السنوات
0	0	209	0	1997
1	224	224	1	1998
4	482	241	2	1999
9	762	254	3	2000
16	1088	272	4	2001
25	1420	284	5	2002
36	1806	301	6	2003

المجموع	21	1785	5782	91
المتوسط	3	255	-	-

فيصبح المؤشران a و b بدلالة t كما يلي:

$$a = \frac{\sum ty - n\bar{t}\bar{y}}{\sum t^2 - n\bar{t}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t}$$

وبتطبيق هذه العلاقات الرياضية على المثال أعلاه، نحصل على:

a= 15.2 و b= 209.2 .

أي أن معادلة مستقيم الاتجاه العام التي يمكن التنبؤ بواسطتها للسنوات المقبلة هي:

Yt = 15.2t + 209.2

مما يعني أن المتغير التابع Yt يتطور بقيمة معامل الانحدار أي بـ 15.2 سنويا.

إلا أنه يجب الإشارة إلى أن النماذج من هذا النوع، والمستخدمة لغرض التنبؤ، يجب التعامل معها بحذر في جانبين:

*لا يمكن مقارنة معطيات سنوات مختلفة والتي تم حسابها بأسعار مختلفة من سنة لأخرى بسبب التضخم، أي أنه يجب الرجوع إلى ما يسمى بالأسعار القياسية indices de prix .

*أن المعطيات التي يتم العمل بها قد أخذت في إطار اقتصادي معين، لذا يجب الحذر من كل العوامل التي ستؤثر في الظاهرة عدا عنصر الزمن.

نموذج التمهيد الأسي:

ينخفض الترجيح المعين لمعطيات الفترات السابقة أسيا مع تقادم البيانات، لذا تلقى البيانات الأحدث ترجيحا أعلى عن بيانات الطلب الأقدم.

إن طرق التمهيد الأسي تجذب، بصفة خاصة، الظواهر التي تتضمن التنبؤ بعدد كبير من البنود. وتعمل هذه الطريقة بأفضل ما يكون تحت الشروط الأتية:

- إن أفق التنبؤ قصير نسبيا، على سبيل المثال، الحاجة إلى التنبؤ اليومي أو الأسبوعي أو الشهري.
- يوجد القليل من المعلومات الخارجية المتاحة عن علاقات السبب والنتيجة بين عنصر وبين العوامل المستقلة التي تؤثر فيه.
- الجهد القليل في التنبؤ المطلوب، ويقاس الجهد بواسطة كل من سهولة تطبيق النموذج والمتطلبات الحسابية المطلوبة (الزمن والتخزين) للتنفيذ.
- سهولة تحديث التنبؤ بتوفر بيانات حديثة التي يمكن انجازها بواسطة إدخالها ببساطة.

نموذج التمهيد الأسي الأساسي:

إن أبسط نموذج هو نموذج تمهيد أسي قابل للتطبيق عندما لا يكون هناك مكون اتجاه أو موسمية في البيانات. لذا فالمتوفر هو المكون الأفقي للطلب، وبسبب العشوائية فإن المعطيات تحول إلى متوسطات والتي نطلق عليها القاعدة.

الهدف الأساسي في نماذج التمهيد الأسي هو تقدير القاعدة واستخدام هذا التقدير في التنبؤ بالطلب المستقبلي.

إن القاعدة – في نموذج التمهيد الأسي الأساسي- للفترة الحالية St تم تقديرها بواسطة تعديل القاعدة السابقة بواسطة جمع أو طرح كسر ألفا (α) للفرق بين الطلب الحالي الفعلي Dt وبين القاعدة السابقة St-1، وعليه فإن تقدير القاعدة الجديدة هو:

القاعدة الجديدة = القاعدة السابقة + ألفا (الطلب السابق – القاعدة السابقة)، أو معبرا عنها بالرموز كما يلي :

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t), \quad \text{حيث} \quad 0 \le \alpha \le 1$$

يقع ثابت التمهيد ألفا بين 0 و 1.

بعد النشر، نحصل على:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$

فإذا تم تعويض yt مرة أخرى بالعلاقة أعلاه أي بدلالة yt-1 ،نحصل على:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + (1-\alpha)^2\hat{y}_{t-1},$$

وهكذا، تتكرر هذه العملية عدة مرات إلى غاية yt-n ؛ وبالتالي يمكن كتابة العلاقة الأولى بشكل عام كما يلي:

$$\hat{y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-i} + (1-\alpha)^{n+1}\hat{y}_{t-n}$$

وبشكل أكثر اختصارا تصبح؛

$$\hat{y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-i}$$

لنفرض قيما مختلفة لـ α ، ونلاحظ النتائج الخاصة بالمعامل $\alpha(1-\alpha)^i$.

معاملات ميل $\alpha(1-\alpha)^i$

i	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.50$
0	0.1	0.2	0.5
1	0.09	0.16	0.25
2	0.081	0.128	0.125
3	0.073	0.102	0.062
4	0.066	0.082	0.031
5	0.059	0.066	0.016
6	0.053	0.052	0.008
7	0.048	0.042	0.004
8	0.043	0.034	0.002

0.001	0.027	0.039	9
0.999	0.893	0.652	∑

ومن الواضح أن القيم الصغيرة لـ (α) سيكون لها أثر تمهيدي أقوى عن القيم الأكبر. وبالعكس، فإن القيم الكبيرة لـ(α) ستعكس تغيرات حقيقية للظاهرة الفعلية (بالإضافة إلى تباينات عشوائية) بسرعة أكثر. هذا فإذا كانت تقلبات الظاهرة ترجع أوليا إلى العشوائية، فيجب اختيار α الأصغر.

من مميزات هذه الطريقة:

* الطريقة بسيطة وتتطلب تخزين أقل من المعلومات. بخلاف طريقة المتوسطات المتحركة التي تتطلب تخزين جميع مشاهدات (N) الماضية. حيث يتطلب نموذج التمهيد الأسي بيانين فقط هما المعطيات الأخيرة الأكثر حداثة والقاعدة السابقة.

* إن الإختيارات المختلفة في α يسمح لنا بالتحكم في ترجيح الطلب الجديد، فإذا كانت α على سبيل المثال تساوي 0.10 ، فإن المعادلة أعلاه تقول أن القاعدة في الفترة الحالية ستتحدد بجمع 10% من المعلومات الفعلية الجديدة و 90% من القاعدة السابقة. ولأن المعلومات الجديدة تتضمن تباينات عشوائية ممكنة، فإننا نخصم 90% من هذه التباينات.

مثال توضيحي: بالرجوع إلى معطيات المثال السابق ص9،

السنوات	عدد الطلبات
2000	3440
2001	3610
2002	3500
2003	3650
2004	3800

ما هو عدد طلبات التسجيل المقدرة لسنة 2005 باستعمال طريقة التمهيد الأسي البسيط بمعامل ألفا مساويا لـ 0.1إلى 0.5 ثم 0.9؟

الحل:

$\textbf{Pt} = [\alpha * Dt\text{-}1] + [(\alpha)(1-\alpha) * Dt\text{-}2] + [(\alpha * (1-\alpha)^2) * Dt\text{-}3] + [(\alpha * (1-\alpha)^3) * Dt\text{-}4] + \alpha * (1-\alpha)^4\ Dt\text{-}4]$

- طريقة التمهيد الأسي بمعامل ألفا مساويا لـ 0.1:

$X=[0.1 * 3800] + [(0.1 * 0.9) * 3650] + [(0.1* 0.9^2) *3500] + [(0.1* 0.9^3) * 3610] + [(0.1 * 0.9^4) * 3440]$

$X=380 + 328.5 + 283.5 + 263.2 + 225.7 = \mathbf{1481} = Pr2005$

- طريقة التمهيد الأسي بمعامل ألفا مساويا لـ 0.5:

$X=[0.5* 3800] + [(0.5 * 0.5) * 3650] + [(0.5* 0.5^2) *3500] + [(0.5* 0.5^3) * 3610] + [(0.5 * 0.5^4)* 3440]$

$X=1900 + 912.5 + 437.5 + 225.6 + 107.5 = \mathbf{3583} = Pr2005$

- طريقة التمهيد الأسي بمعامل ألفا مساويا لـ 0.9:

$X=[0.9 * 3800] + [(0.9 * 0.1) * 3650] + [(0.9* 0.1^2) *3500] + [(0.9* 0.1^3) * 3610] + [(0.9 * 0.1^4) * 3440]$

$X= \mathbf{3783.5} = Pr2005$

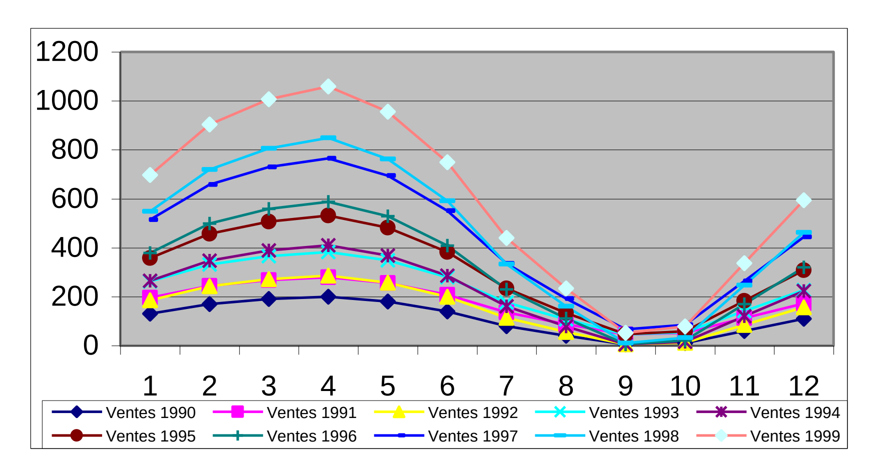
ظاهرة الموسمية:

يقصد بالموسمية تلك التغيرات التي تتكرر في فترات معينة، والتي تعود إلى عامل أو مجموعة عوامل من المحيط سواء الداخلي أو الخارجي للمؤسسة.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	مبيعات 1990	مبيعات 1991	مبيعات 1992	مبيعات 1993	مبيعات 1994	مبيعات 1995	مبيعات 1996	مبيعات 1997	مبيعات 1998	مبيعات 1999	معامل الموسمية
J	130	196	185	262	265	358	379	515	548	698	1.17
F	170	244	243	331	348	457	499	658	720	904	1.52
M	190	268	272	366	389	507	558	730	806	1007	1.70
A	200	280	286	383	410	532	588	766	849	1059	1.78
M	180	256	257	349	368	482	528	694	763	956	1.61
J	140	208	200	280	285	383	409	551	591	749	1.26
J	80	136	113	176	161	233	230	336	333	440	0.74
A	40	88	56	107	78	134	110	192	161	233	0.39
S	5	46	5	46	5	47	6	67	10	53	0.08

O	10	52	12	55	16	59	21	85	32	78	0.13
N	60	112	84	141	120	183	170	264	247	336	0.56
D	110	172	156	228	223	308	319	443	462	594	1.00
مجموع	1315	2058	1870	2724	2668	3682	3818	5302	5522	7107	12

إن تمثيل هذه المعطيات في شكل بياني يبين بوضوح ظاهرة الموسمية.



لاحظ كيف أن هذه الظاهرة تبلغ أقصاها بين الشهرين الثالث والرابع، كما أنها تبلغ القيم الدنيا بين الشهرين التاسع والعاشر، وذلك الأمر يتكرر سنويا، ولو بمقدار متزايد. فالسؤال المطروح كيف يمكن إجراء التنبؤ لمثل هذه الظواهر المتميزة؟

مثلا لدينا البيانات التاريخية التالية حسب الثلاثيات لمدة خمس سنوات:

السنة الأولى	السداسي 1= 23 السداسي 2 = 38 السداسي 3 = 22 السداسي 4 = 66	مجموع السنة الأولى = 149
السنة الثانية	السداسي 1= 45 السداسي 2 = 76 السداسي 3 = 47 السداسي 4 = 125	مجموع السنة الثانية = 293
السنة الثالثة	السداسي 1= 79 السداسي 2 = 141 السداسي 3 = 94 السداسي 4 = 278	مجموع السنة الثالثة = 592
	السداسي 1= 166	

السنة الرابعة	السداسي 2 = 260 السداسي3 = 141 السداسي 4 = 347	مجموع السنة الرابعة = 914
السنة الخامسة	السداسي 1= 220 السداسي 2 = 304 السداسي3 = 138 السداسي 4 = 340	مجموع السنة الخامسة = 1002

1- التمثيل البياني لهذه المعطيات:



من الشكل البياني نلاحظ تكرار نفس الشكل لكل سنة؛ أي أن معطيات السداسي الثاني ترتفع مقارنة بالسداسي الأول، لتنخفض مرة أخرى في السداسي الثالث، و ترتفع مرة أخرى في السداسي الرابع.

باستعمال المتوسط المتحرك لأربعة فترات، يمكن التخلص من أثر الموسمية. الا أن استعمال المتوسطات المتحركة المرجحة ولخمس سنوات سيكون أفضل؛ حيث 50% من معطيات الثلاثي n، و 100% من معطيات الثلاثي n+1 ، و 100% من معطيات الثلاثي n+2 ، و100% من معطيات الثلاثي n+3 ، و 50% من معطيات الثلاثي n للسنة المقبلة.

نجد مثلا، للثلاثي الثالث من السنة الأولى:

(23*0.5) + 38 + 22 + 66 + (45*0.5)/4 = 40

فنحصل على الجدول التالي:

السنة الأولى	السداسي 1= * السداسي 2 = * السداسي3 = 40 السداسي 4 = 47.5
السنة الثانية	السداسي 1= 55.4 السداسي 2 = 65.9 السداسي3 = 77.5 السداسي 4 = 89.9
السنة الثالثة	السداسي 1= 103.9 السداسي 2 = 128.9 السداسي3 = 158.9 السداسي 4 = 184.6
السنة الرابعة	السداسي 1= 205.4 السداسي 2 = 219.9 السداسي3 = 235.25 السداسي 4 = 247.5
السنة الخامسة	السداسي 1= 252.6 السداسي 2 = 251.4 السداسي3 = * السداسي 4 = *

تحديد مستقيم الاتجاه العام والتنبؤ الناتج بعد تصحيح ظاهرة الموسمية:

دراسة ظاهرة الموسمية تعني دراسة المعاملات الموسمية. حساب هذه الأخيرة يتمثل في تحديد حصة كل ثلاثي بشكله المعطى مقارنة بالثلاثي نفسه بشكل عادي لو لم تكن هناك موسمية. للتوضيح ندرس المثال السابق. في البداية نضع المعطيات السابقة في جدول بطريقة معينة قصد حساب معاملات الموسمية، حيث تمثل الأعمدة الثلاثيات والأسطر هي السنوات.

المعطيات حسب الثلاثيات

	1	2	3	4	المجموع
1	23	38	22	66	**149**
2	45	76	47	125	**293**
3	79	141	94	278	**592**
4	166	260	141	347	**914**
5	220	304	138	340	**1002**
المجموع	**533**	**819**	**442**	**1156**	**2950**

متوسط في الثلاثي	106.6	163.8	88.4	231.2	147.5
المعامل الموسمي	0.72	1.11	0.60	1.57	

تم الحساب في الجدول حسب الخطوات التالية:

1. حساب المجموع حسب كل ثلاثي، مثلا 533 للأول، 819 للثاني...الخ.
2. حساب المتوسط بالنسبة لكل ثلاثي أيضا؛ 106.6 للثلاثي الأول وهكذا...
3. حساب متوسط الثلاثي الواحد بشكل عام دون الأخذ بعين الاعتبار لثلاثي معين؛ 147.5 = 4/5/2950

معطيات الظاهرة مصححة:

السنة	الثلاثيات	المبيعات	المعاملات الموسمية	المبيعات مصححة
1	1	23	0.72	31.90
	2	38	1.11	34.20
	3	22	0.60	36.70
	4	66	1.57	42.00
2	1	45	0.72	62.50
	2	76	1.11	68.50
	3	47	0.60	78.30
	4	125	1.57	79.60
3	1	79	0.72	109.70
	2	141	1.11	127
	3	94	0.60	156.70
	4	278	1.57	177.10
4	1	166	0.72	230.60
	2	260	1.11	234.2
	3	141	0.60	235
	4	347	1.57	221
5	1	220	0.72	305.60
	2	304	1.11	273.90
	3	138	0.60	230
	4	340	1.57	216.60

4. المعامل الموسمي هو النسبة بين كل متوسط في ثلاثي معين والمتوسط بشكل عام والذي تم حسابه في النقطة السابقة.

ومن هنا يتم تصحيح المعطيات الأصلية بواسطة معاملات الموسمية، وتظهر النتائج في الجدول السابق.

حساب مؤشرات معادلة المستقيم:

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

a = 14.39 , b = -3.57

Y = 14.39 x - 3.57

I (1)	Y_i (3)	$xi - \bar{x}$ (6)	$(xi - \bar{x})^2$ (7)	$y - \bar{y}$ (8)	$(x - \bar{x})(yi - y)$ (9)	y
1	31.90	-9.5	-115.66	90.25	1098.72	10.82
2	34.20	-8.5	-113.36	72.25	963.52	25.21
3	36.70	-7.5	-110.86	56.25	831.41	39.61
4	42.00	-6.5	-105.56	42.25	686.11	54.00
5	62.50	-5.5	-85.06	30.25	467.80	68.39
6	68.50	-4.5	-79.06	20.25	355.75	82.79
7	78.30	-3.5	-69.26	12.25	242.39	97.18
8	79.60	-2.5	-67.96	6.25	169.89	111.57
9	109.70	-1.5	-37.86	2.25	56.78	125.97
10	127	-0.5	-20.56	0.25	10.28	140.36
11	156.70	0.5	9.15	0.25	4.57	154.75
12	177.10	1.5	29.55	2.25	44.32	169.14
13	230.60	2.5	83.05	6.25	207.61	183.54
14	234.2	3.5	86.65	12.25	303.26	197.93
15	235	4.5	87.45	20.25	393.50	212.32
16	221	5.5	73.45	30.25	403.95	226.72
17	305.60	6.5	158.05	42.25	1027.29	241.11
18	273.90	7.5	126.35	56.25	947.59	255.50
19	230	8.5	82.45	72.25	700.78	269.90
20	216.60	9.5	69.05	90.25	655.93	284.29
Total	252	0	140	665	9571.45	
	$\bar{x} = 10.5$		$\bar{y} = 147.56$		$a = 14.39$	b=-3.57

إن التنبؤ للثلاثيات الأربعة للسنة المقبلة هي:

Y1 = 14.39 (21) - 3.57 = 298.62

Y 2= 14.39 (22) - 3.57 = 313.01

Y 3= 14.39 (23) - 3.57 = 327.4

Y4 = 14.39 (24) - 3.57 = 341.79

وبالأخذ بعين الاعتبار للموسمية، فان:

Y1 = 298.62* 0.72 = 215.01

Y 2= 313.01* 1.11 = 347.44

Y 3= 327.4* 0.6 = 196.44

Y4 = 341.79* 1.57 = 536.61

التنبؤ باستعمال التمهيد الأسي على معطيات سنوية

(α = 0.4)

إن التنبؤ باستعمال التمهيد الأسي سيعطي وزنا أكبر للمعطيات الحديثة.

$$\hat{x}_1 = ax_{i-1} + a(1-a)x_{i-2} + ... + (1-a)^{n+1}x_{i-n} + a(1-a)^{n-1}\hat{x}_a$$

نكتفي إذن بـ 4 أو 5 فترات باستعمال القانون التالي:

$$\hat{x}i = \frac{\alpha x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)x_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-3} + ... + \alpha(1-\alpha)^{n-1}x_{t-n}}{\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + ... + \alpha(1-\alpha)^{n-1}}$$

مهما تكن البيانات المستعملة فيجب أن تكون صححت فيها الموسمية (وإلا سنفضل موسم على الماضي القريب)

في المثال الحالي α=0.4، لدينا:

$$\hat{x}_i = \frac{400.8 + 219.4 + 85.2 + 25.3 + 7.7}{0.4 + 0.24 + 0.144 + 0.0864 + 0.05184} = \frac{738.4}{0.9224} = 800.5$$

لنشر هذا التنبؤ على الثلاثيات القادمة، يجب حساب متوسط مبيعات الثلاثي (200.1=4/800.5) وإعادة موسميتها.

الثلاثي1: 200.1*0.72=144

الثلاثي2: 200.1*1.11=222

الثلاثي3: 200.1*0.60=120

الثلاثي4: 200.1*1.57=314

▪ نموذج الانحدار غير الخطي:

قد تكون العلاقة في ظاهرة ما، بين العديد من المتغيرات وليس اثنان فقط، ونكون هنا بصدد نموذج الانحدار المتعدد. يهدف نموذج الإنحدار الخطي المتعدد إلى تفسير قيمة المتغير التابع (y) بأنها توليفة خطية من قيم المتغيرات المستقلة ($x_i.....x_n$) ويمكن كتابتها في شكل العلاقة التالية بشكل عام:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_jx_j + ...a_nx_n + b$$

انه من الصعب أن ندرس نموذجا معقدا من هذا النوع بشكل عام، لذا سنفترض نموذجا بمتغيرين x1, x2، والذي يكتب:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$$

ومع ذلك سنلاحظ مدى أهمية وتعقد العمليات الضرورية للحصول على قيم a وb المختلفة؛في البداية نحصل على مجموعة المعادلات التي تجعل مجموع الإنحرافات (Y-^y) في أدنى قيمتها كما أشرنا سابقا في طريقة المربعات الصغرى، فنحصل على:

$$\sum y_i = nb + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2$$
$$\sum x_{1i}y_i = nb\sum x_{1i} + a_1\sum {x_{1i}}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i}$$
$$\sum x_{2i}y_i = nb\sum x_{2i} + a_1\sum x_{1i}x_{2i} + a_2\sum {x_{2i}}^2$$

لنضع:

$$x_j = X_j - \overline{X}$$

$$y = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$(2')\begin{cases}\sum x_1y = a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_1x_2 \\ \sum x_2y = a_1\sum x_1x_2 + a_2\sum x_2^2\end{cases}$$

$$a_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2) - (\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$a_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

أما b يتم حسابها من خلال العلاقة:

$$\bar{y} = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + b \Rightarrow b = \bar{y} - a_1 \bar{x}_1 - a_2 \bar{x}_2$$

<u>مثال توضيحي:</u>

نرغب في إنشاء نموذج يحدد العلاقة بين المتغير y وكميات المتغيرين x_1 وx_2 وذلك من خلال معطيات العشر (10) سنوات الأخيرة، وذلك انطلاقا من خط الإنحدار الذي يجب حساب مؤشراته.

السنة	y	Xi	X2	y	x1	x2	x1Y	x2Y	x1x2	x_1^2	x_2^2
1	40	6	4	-17	-12	-8	204	136	96	144	64
2	44	10	4	-13	-8	-8	104	104	64	64	64
3	46	12	5	-11	-6	-7	66	77	42	36	49
4	48	14	7	-9	-4	-5	36	45	20	16	25
5	52	16	9	-5	-2	-3	10	15	6	4	9
6	58	18	12	1	0	0	0	0	0	0	0
7	60	22	14	3	4	2	12	6	8	16	4
8	68	24	20	11	6	8	66	88	48	36	64
9	74	26	21	17	8	9	136	153	72	64	81
10	80	32	24	23	14	12	322	276	168	196	144
∑	**570**	**180**	**120**	**0**	**0**	**0**	**956**	**900**	**524**	**576**	**504**
متوسط	57	18	12	0	0	0					

$$a_1 = \frac{(956)(504) - (900)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 0.65$$

$$a_2 = \frac{(900)(576) - (956)(524)}{(576)(504) - (524)^2} = 1.11$$

$$b = \bar{y} - a_1 \bar{x}_1 - a_2 \bar{x}_2 = 57 - (0.65)(18) - (1.11)(12) = 31.9$$

ومنها معادلة خط الإنحدار بالنسبة إلى العناصر(x_1) و (x_2) هي:

$$y = 0.65x_i + 1.11x_2 + 31.9$$

تزكية المؤشرات المقدرة:

مثلما هو الحال بالنسبة للإنحدار البسيط، نبدأ بتحديد التباينات لكل معامل a_i :

$$\text{var}\, a_1 = \partial_u^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\text{var}\, a_2 = \partial_u^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

بما أن ∂_u^2 مجهولة، نستعمل التباين أو التشتت (s) :

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}$$

الذي يمكن كتابته بالنسبة لـ a1 وa2 كما يلي:

$$S^2 a_1 = \left(\frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}\right)\left(\frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right)$$

$$S^2 a_2 = \left(\frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right)$$

K: تمثل عدد المؤشرات المقدرة.

N: عدد المشاهدات.

اختبار student:

للتأكد من مدى صحة النموذج المقترح ومدى ملاءمته للواقع المشاهد، يمكن إجراء اختبار student كما هو موضح في الجدول الموالي:

السنة	Y_i	$\hat{Y}_i$	$e_i = \hat{y}_i - y_i$	e_i^2

1	40	40.32	0.32	0.1024
2	44	42.92	-1.08	1.1664
3	46	45.33	-0.67	0.4489
4	48	48.85	0.85	0.7225
5	52	52.37	0.37	0.1369
6	58	57	-1	1
7	60	61.82	1.82	3.3124
8	68	69.78	1.78	3.1684
9	74	72.19	-1.81	3.2761
10	80	79.42	-0.58	0.3364
	570	570	0.0	13.6704

$$S^2 a_1 = \left(\frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}\right)\left(\frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right) = \left(\frac{13.6704}{10-3}\right)\left(\frac{504}{(576*504)-(524)^2}\right) \cong 0.06$$

$$S^2 a_2 = \left(\frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\right) = \left(\frac{13.6704}{10-3}\right)\left(\frac{576}{(576*504)-(524)^2}\right) \cong 0.07$$

$$Sa_1 = 0.24$$
$$Sa_2 = 0.27$$

نقوم باختبار a_1, a_2:

$$t_1 = \frac{a_1}{s_{a1}} = \frac{0.65}{0.24} = 2.7$$

$$t_2 = \frac{a_2}{s_{a1}} = \frac{1.11}{0.27} = 4.11$$

من أجل(v = n - k = 10 – 3 = 7) درجات حرية، فان $t_{0,0.5} = 2.635$.

نجد قيمتي t_1,t_2 المحسوبتين أعلاه أكبر من القيمة النظرية، وبالتالي يمكن اعتبار a_1,a_2 إحصائيا ذات معنى في حدود $\alpha = 0.05$.

حساب معامل التحديد المتعدد

إن قوة العلاقة بين المتغير التابع y والمتغيرات المستقلة x_1,x_2 يتم قياسها بواسطة معامل التحديد المتعدد(r^2) ، الذي يتم حسابه بالقانون:

$$r^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^{\ 2}}{\sum y_1^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{a_1 \sum x_1 y + a_2 \sum x_2 y}{\sum y_i^2}$$

في مثالنا السابق:

$$r^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^{\ 2}}{\sum y_1^2} = 1 - \frac{13.6704}{1634} = 1 - 0.0084 = 0.9916$$

حساب معامل التحديد المتعدد المصحح:

يتم حسابه في حالة إضافة متغيرات مستقلة أخرى مما يعني تخفيض درجة الحرية؛ وهو:

$$\bar{r}^2 = 1 - (1 - r^2)\frac{n-1}{n-k}$$

بالنسبة للمثال السابق:

$$\bar{r}^2 = 1 - (1 - r^2)\frac{n-1}{n-k} = 1 - 1 - (0.9916)\frac{10-1}{10-3} = 1 - 0.0084(1.286) = 0.9892$$

اختبار معنى الأنحدار:

يتم ذلك من خلال حساب F كما يلي:

$$F_{y1=k-1,y_2=n-k} = \frac{\dfrac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{k-1}}{\dfrac{\sum (\hat{y}_i - y_i)^2}{n-k}} = \frac{\dfrac{r^2}{k-1}}{\dfrac{1-r^2}{n-k}}$$

بالنسبة للمثال السابق، الذي يعطينا معامل **التحديد المتعدد** غير مصحح بقيمة 0.9916، فان:

$$F_{y1=2,y_2=7}=\frac{\frac{0.9916}{2}}{\frac{1-0.9916}{7}}=413.17$$

من أجل $\bar{r}^2$ مصحح ويساوي 0.9892، فان:

$$F_{y1=2,y_2=7}=\frac{\frac{0.9892}{2}}{\frac{1-0.9892}{7}}=320.57$$

معامل الإرتباط الجزئي

يمكن تحديد الإرتباط بين المتغير المستقل x_1 والمتغير التابع y وذلك باستبعاد أثر المتغير x_2 بواسطة العلاقة :

$$r_{yx1,x_2}=\frac{r_{yx1}-r_{yx2}r_{x1x1}}{\sqrt{1-r^2{}_{x1x2}}\sqrt{1-r^2{}_{yx1}}}$$

$$r_{yx2,x_1}=\frac{r_{yx2}-r_{yx1}r_{x1x2}}{\sqrt{1-r^2{}_{x1x2}}\sqrt{1-r^2{}_{yx1}}}$$

حيث أن:

r_{yx1},x_2 : معامل الارتباط الجزئي بين y وx1 .

r_{yx2},x_1 : معامل الارتباط الجزئي بين y وx2 .

r_{yx1} : معامل الارتباط البسيط بين y وx1 .

r_{yx2} : معامل الارتباط البسيط بين y وx2 .

r_{x1x2} : معامل الارتباط البسيط بين x1 وx2 .

من **المثال السابق** نجد:

- معامل الارتباط البسيط بين y وx1 .

$$r_{yx_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{956}{\sqrt{576}\sqrt{1634}} = 0.9854$$

- معامل الارتباط البسيط بين y وx_2 :

$$r_{yx_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2}\sqrt{\sum y^2}} = \frac{900}{\sqrt{504}\sqrt{1634}} = 0.9917$$

- معامل الارتباط البسيط بين x1 و x2:

$$r_{x1x2} = \frac{\sum x_1 x_2}{\sqrt{\sum x_1^2}\sqrt{\sum x_2^2}} = \frac{524}{\sqrt{576}\sqrt{504}} = 0.9725$$

- معامل الارتباط الجزئي بين y وx1 :

$$r_{yxi,x2} = \frac{r_{yx1} - r_{yx2} r_{x1x2}}{\sqrt{1-r^2{}_{x1x2}}\sqrt{1-r^2{}_{yx2}}} = \frac{0.9854-(0.9917)(0.9725)}{\sqrt{1-(0.9725)^2}\sqrt{1-(0.9917)^2}} = 0.7023$$

- معامل الارتباط الجزئي بين y وx2 :

$$r_{yx2,x1} = \frac{r_{yx2} - r_{yx1} r_{x1x2}}{\sqrt{1-r^2{}_{x1x2}}\sqrt{1-r^2{}_{yx1}}} = \frac{0.9917-(0.9854)(0.9725)}{\sqrt{1-(0.9725)^2}\sqrt{1-(0.9854)^2}} = 0.8434$$

ومن هذه النتائج نلاحظ أن المتغير الثاني x2 هو ذو الأثر الأكبر في هذه الظاهرة.

مثال توضيحي:

X1X2	X2²	X1²	X2Y	X1Y	X2	X1	Y	
12	36	4	180	60	6	2	30	1
3	9	1	66	22	3	1	22	2

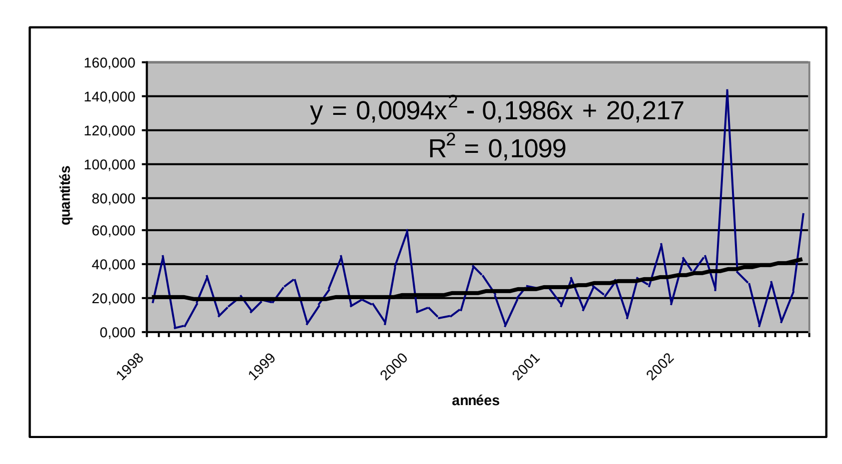
12	4	36	58	174	2	6	29	3
20	25	16	175	140	5	4	35	4
9	9	9	75	75	3	3	25	5
16	64	4	320	80	8	2	40	6
6	1	36	24	144	1	6	24	7
4	4	4	42	42	2	2	21	8
14	4	49	64	224	2	7	32	9
1	1	1	15	15	1	1	15	10
97	157	160	1019	976	33	34	273	المجموع
-	-	-	-	-	3.3	3.4	27.3	المتوسط

$$Y = 2.15 \; X1 + 3.13 \; X2 + 9.65$$

النموذج المتجه نحو الداخل غير الخطي:

قد تكون العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل علاقة غير خطية تصاغ بالشكل التالي:

$$Y = a \; x^2 + b\,x + c$$



$$y_1 = a + b*t + c*t^2$$

$$E^2 = (y_t - a - b*t - c*t^2)^2$$

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$
$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

مثال:

يوضح الجدول التالي تعداد سكان بلد ما خلال الأعوام 1950-1850 على فترات عشرية:

السنة	1950	1940	1930	1920	1910	1900	1890	1880	1870	1860	1850
السكان(مليون)	151.1	131.7	122.8	105.7	92.0	76.0	62.9	50.2	39.8	31.4	23.2

- أوجد معادلة القطع المكافئ باستخدام طريقة المربعات الصغرى
- احسب القيم الإتجاهية للسنوات بالجدول وقارنها بالقيم الفعلية
- قدر عدد السكان في 1954
- قدر عدد السكان في 1960
- قدر عدد السكان في 1840 وقارن بالقيمة الفعلية

الحل:

نعتبر أن القيم x و y عن السنة وعدد السكان. معادلة قطع مكافئ المربعات الصغرى التي توافق البيانات هي:

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

حيث يمكن الحصول على قيم a_0, a_1, a_2 من المعادلات التالية:

$$\sum Y = a_0 N + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2$$
$$\sum XY = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^2$$
$$\sum X^2 Y = a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4$$

من الملائم اختيار x بحيث يكون منتصف سنة 1900 تقابل x=0 والسنوات

1850.1860.1870.1880.18890.1910.1920.1930.1940.1950 تقابل -1، -2،-3،-4،-5 و 1،2،3،4،5 على الترتيب.

بهذا الإختيار فأن $\sum x, \sum x^2$ =0 ويمكن ترتيب الحسابات في الجدول أسفله:

باستخدام هذا الجدول، تصبح المعادلات:

$$11a_0 + 110a_2 = 886.8$$

$$110a_1 = 1429.8$$

$$110a_0 + 1958a_2 9209.0$$

المعادلة المطلوبة هي :

$$Y = 76.64 + 13.00x + 0.3974x^2$$

حيث:

$$a_1 = 13.00$$

$$a_2 = 0.3974$$

$$a_0 = 76.64$$

نقطة الأصل x=0 هي أول جويلية 1900 ووحدة x هي 10 سنوات؛

X^2y	xy	X^4	X^3	X^2	y	x	السنة
580.0	-116.0	625	-125	25	23.2	-5	1850
502.4	-125.6	256	-64	16	31.4	-4	1860
358.2	-119.4	81	-27	9	39.8	-3	1870
200.8	-100.4	16	-8	4	50.2	-2	1880
62.9	-62.9	1	-1	1	62.9	-1	1890
0	0	0	0	0	76.0	0	1900
92.0	92.0	1	1	1	92.0	1	1910
422.8	211.4	16	8	4	105.7	2	1920
1105.2	368.4	81	27	9	122.8	3	1930

2107.2	526.8	256	64	16	131.7	4	1940
3777.5	755.5	625	125	25	151.1	5	1950
9209.0	1429.8	1958	0	110	886.8	0	∑

القيم الإتجاهية نحصل عليها بالتعويض بالقيم-X=-5,-4,-3,-2, 1,0,1,2,3,4,5 وهي موضحة في الجدول الموالي مع القيم الفعلية ومنها يتضح أن الإتفاق جيد.

X=-5 1850	X=-4 1860	X=-3 1870	X=-2 1880	X=-1 1890	X=0 1900	X=1 1910	X=2 1920	X=3 1930	X=4 1940	X=5 1950	السنة
21.6	3131.0	41.2	52.2	64.0	76.6	90.0	104.2	119.2	135.0	151.6	قيم اتجاهية
23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1	قيم فعلية

- سنة 1945 تقابل x=4.5 ومنها:

$$Y=76.64+13.00(4.5)+0.3974(4.5)^2=143.2$$

- سنة 1960 وتقابل x=6 ومنها :

$$Y=76.64+13.00(6)+0.3974(6)_2= 168.9$$

- سنة 0841 وتقابل x=-6 ومنها:

$$Y=76.64+13.00(-6)+0.3974(-6)_2= 12.9$$

وهذه لا تتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 17.1.

هذا المثال يوضح حقيقة أن العلاقة التي من الممكن أن تكون مرضية في مدى قيم معينة لا تكون بالضرورة مرضية في مدى أوسع للقيم.

نموذج التمهيد الأسي المضاعف:

لوحظ أن التمهيد الأسي بشكله الأول يصلح للحالات التي يكون فيها الاتجاه ثابتا. حيث لا يشتمل نموذج التمهيد الأسي الأساسي على

مكونات اتجاه أو موسمية في البيانات المتوفرة لإعداد التنبؤ. لقد جاءت العديد من الأعمال لتعديل نموذج التمهيد الأسي. حيث أعد كل من ونبرزwinbers في سنة 1960 وبيجلزPegels في سنة1969 نماذج قادرة على شمول هذه الآثار. فاذا مافترضنا ظاهرة معينة حيث الاتجاه العام لها يزيد بقيمة واحد سنويا، فبتطبيق التمهيد الأسي بـ α =0.2، نلاحظ مقدار الخطأ الناتج عن هذه العملية(أنظر العمود (4) من الجدول الموالي).

الشهر	y_t	$\hat{y}_t$	الخطأ	$\hat{\hat{y}}_t$	$2\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t$	$\frac{\alpha(\hat{y}_t - \hat{\hat{y}}_t)}{1-\alpha}_t$	$\overline{y}_t$	الخطأ
0	100	100	0	100	100	0	100	0
1	101	100	1.00	100	100	0	100	1
2	102	100.199	1.801	100.039	100.359	0.039	100.397	1.602
3	103	100.559	2.441	100.143	100.975	0.103	101.077	1.923
4	104	101.047	2.953	100.323	101.771	0.18	101.95	2.049
5	105	101.637	3.363	100.585	102.689	0.262	102.95	2.05
6	106	102.309	3.691	100.929	103.689	0.344	104.032	1.967
7	107	103.047	3.953	101.352	104.742	0.423	105.164	1.835
8	108	103.837	4.163	101.849	105.852	0.497	106.322	1.678
9	109	104.669	4.331	102.413	106.925	0.564	109.819	1.51
10	110	105.535	4.465	103.037	108.033	0.624	110.969	1.343
11	111	106.428	4.572	103.715	109.141	0.678	112.106	1.18
12	112	107.342	4.658	104.44	110.244	0.725	113.23	1.031
13	113	108.273	4.727	105.206	111.34	0.766	114.339	0.893
14	114	109.218	4.782	106.008	112.428	0.802	115.437	0.77
15	115	110.174	4.826	106.841	113.507	0.833	116.522	0.66
16	116	111.139	4.861	107.7	114.578	0.859	117.593	0.562
17	117	112.111	4.889	108.582	115.640	0.882	118.656	0.478
18	118	113.088	4.912	109.483	116.693	0.901	117.593	0.407
19	119	114.07	4.930	110.4	117.74	0.917	118.656	0.344
20	120	115.055	4.945	111.331	118.779	0.931	119.71	0.289
40	140	135	5	131.003	138.996	0.999	139.995	0.005

بالتالي إذا لاحظنا أن الظاهرة تتبع اتجاها معينا، وليكن اتجاها خطيا، والذي يمكن كتابته:

$$y_t = a * t + b$$

$$\hat{y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i \left[b + a(t-i)\right]$$

بعد عملية النشر، نحصل على:

$$\hat{y}_{t+i} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i b + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i at - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i ia$$

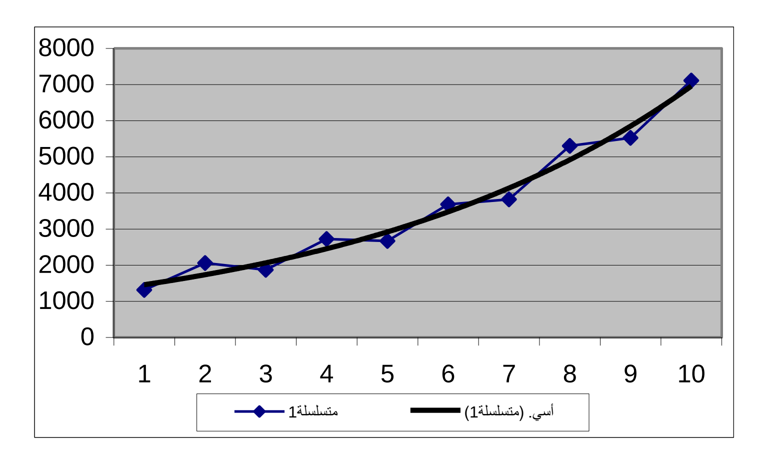
$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i * i = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

فان:

$$\hat{y}_{t+1} = b + at - a\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

وبتطبيق العلاقة الجديدة في المثال أعلاه نلاحظ مدى انخفاض مقدار الخطأ الناتج (أنظر العمود التاسع من الجدول أعلاه).

أما في حالة وجود الموسمية نستعمل طرقا أخرى؛ لاحظ في الشكل الموالي كيف أن المعطيات تبين وجود اتجاه عام من حيث التزايد في الكميات عبر الزمن إضافة إلى وجود موسمية واضحة من خلال الشكل. هنا لا تصبح النماذج السابقة صالحة وإنما نستعمل مثلا طريقة holt & winters .



نلاحظ في الواقع أن المشاهدات الحديثة تتمتع بأهمية أكثر من المشاهدات القديمة، وبالتالي يمكن البحث والاعتماد على متوسط مقدر:

$$P_{t+1} = M_t = a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 x_{t-2} + \ldots + a_k x_{t-k+1}$$

مع اعتبار العلاقة:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 .... \succ a_k$$

يمكن تلخيص نموذج طريقة هولت Holt كما يلي:

$$a_t = \alpha D_t + (1-\alpha)(a_{t-1}+b_{t-1}) = \alpha D_t + (1-\alpha)DF_{t-1,\, t}$$

$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

$$DF_{t,t+r} = a_t + r * b_t$$

أما نموذج طريقة ونتر Winters فهو:

$$a_t = \alpha\,(D_t / c_{t-T}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta\,(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

$$c_t = \gamma\,(D_t / a_t) + (1-\gamma)c_{t-T}$$

$$F_{t,t+r} = (a_t + rb_t)c_{t+r-T}$$

حيث: عدد الفترات = T و أفق التنبؤ = r

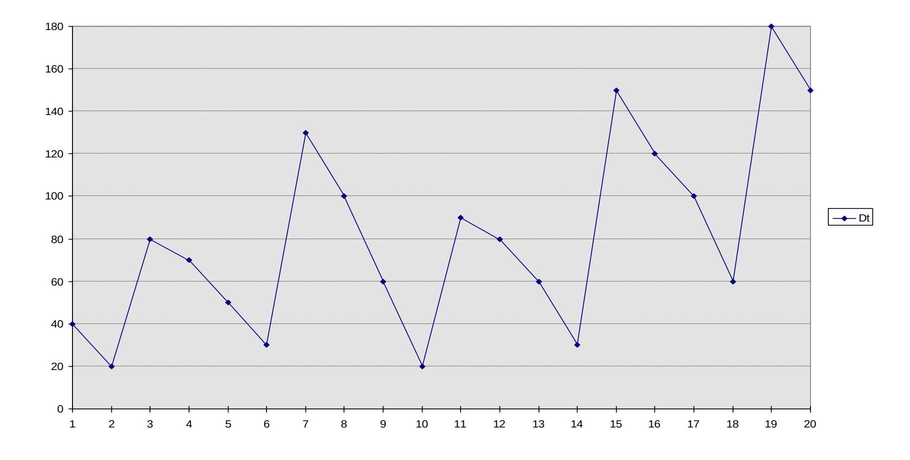
مثال توضيحي:

1.1. لتكن لدينا المعطيات الخاصة بخمسة سنوات حسب الفصول الأربعة:

Périodes t	Demandes Dt
1	40
2	20
3	80
4	70
5	50
6	30
7	130
8	100
9	60
10	20
11	90
12	80
13	60
14	30
15	150
16	120
17	100
18	60
19	180
20	150

المطلوب : التنبؤ للفصول الأربعة للسنة الموالية؟

.1.2- إن التمثيل البياني لهذه الظاهرة يظهر في الشكل الموالي:



ونلاحظ بالفعل وجود اتجاه وموسمية. أن الفصول هي ربيع، صيف، خريف وشتاء. فالملاحظ أن الطلب مرتفع في الخريف ودائما منخفض في الصيف.

أما عن **معاملات الموسمية** (أنظر فيما بعد طريقة حسابها) فهي:

$c1 = c_{ربيع} = 0,8335$

$c_2 = c_{صيف} = 0,3930$

$c_3 = c_{خريف} = 1,5420$

$c_0 = c_{شتاء} = 1,2315$

باستعمال دالة الاتجاه العام :

$Y = aX + b$

فان:

$a_{20} = 128,41$

$b_{20} = 4,34$

2. إزالة الموسمية بالنسبة للطلب:

حساب المتوسطات المتحركة المرجحة بالرتبة (4) CMA_t :

$CMA_{85\ خريف}(4) = (½ * 40 + 20 + 80 + 70 + ½ * 50) / 4 = 53,75$

$CMA_{86\ ربيع}(4) = (½ * 80 + 70 + 50 + 30 + ½ * 130) / 4 = 63,75$

$CMA_{87\ صيف}(4) = (½ * 100 + 60 + 20 + 90 + ½ * 80) / 4 = 65$

$CMA_{88\ خريف}(4) = (½ * 60 + 30 + 150 + 120 + ½ * 100) / 4 = 95$

حساب معاملات الموسمية (بالنسبة للمتوسطات المتحركة المرجحة) : D_t/CMA_t

خريف 85 : 80 / 53,75 = 1,49

ربيع 86 : 50 / 63,75 = 0,78

صيف 86 : 20 / 65 = 0,31

ربيع 88 = 60 / 72.5 = 0,83

حساب معاملات الموسمية coefficients de saisonnalité c_t

$c_{ربيع}$ = (0,78 + 0,83 + 0,83 + 0,89) / 4 = 0,8325

$c_{صيف}$ = 0,3925

$c_{خريف}$ = 1,54

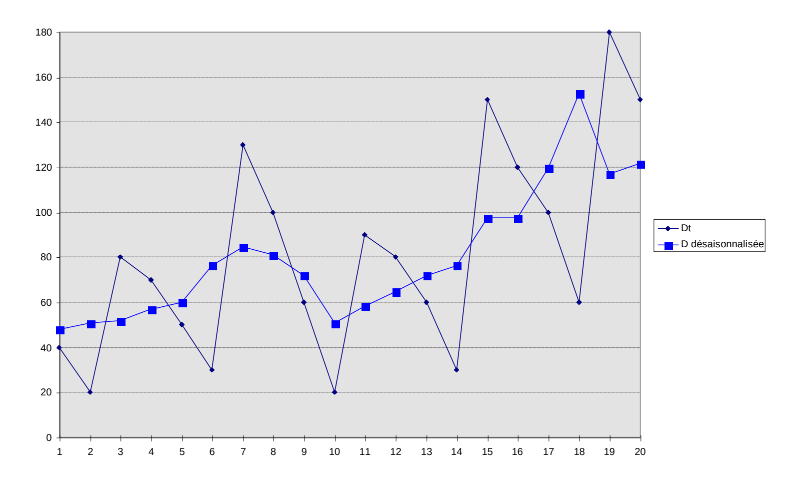
$c_{شتاء}$ = 1,2315

Trim	c_t	Norm c_t	
P	0.8325	0,8325 * 4 / 3,995 = 0,8335	c_1
E	0.3925	0,3925 * 4 / 3,995 = 0,3930	c_2
A	1.54	1,54 * 4 / 3,995 = 1,5420	c_3
H	1.23	1,23 * 4 / 3,995 = 1,2315	c_0

- ومنه الطلب بدون موسمية يصبح كما يلي: D_t/Norm c_t

Trim	An 85	An 86	An 87	An 88	An 89
P	47.99	59.99	71.99	**71,99**	119.97
E	50.89	76.34	50.89	76.34	**152,67**
A	51.88	84.31	**58,37**	97.28	116.73
H	56.84	81.20	64.96	**97,44**	121.80

ويمكن تمثيلها في الشكل البياني :



بتطبيق العلاقة الخاصة بالانحدار الخطي البسيط نحصل على:

$a0 = 38,34 \cong 40$

$b0 = 4,01$

وبالتالي تكون قيم a و b للفترة (20) هي:

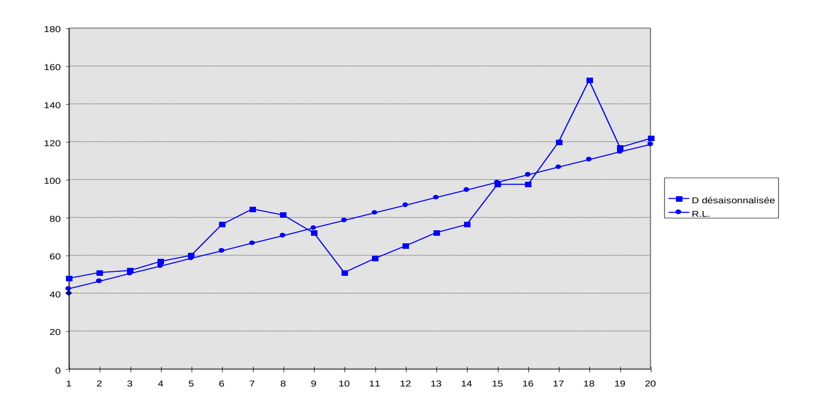
$a_{20} = a_0 + 20 * b_0 = 118,63$

$b_{20} = b_0 = 4,01$

بتطبيق النتائج المحصل عليها بالنسبة للسلسلة الزمنية محل الدراسة، نجد:

t	Dt	DDt	t*DDt	R.L.
1	40	47,99	47,99	42,36
2	20	50,89	101,78	46,37
3	80	51,88	155,64	50,39
4	70	56,84	227,36	54,40
5	50	59,99	299,95	58,41
6	30	76,34	458,04	62,43
7	130	84,31	590,17	66,44
8	100	81,2	649,6	70,46
9	60	71,99	647,91	74,47
10	20	50,89	508,9	78,49
11	90	58,37	642,07	82,50
12	80	64,96	779,52	86,52
13	60	71,99	935,87	90,53
14	30	76,34	1068,76	94,54
15	150	97,28	1459,2	98,56
16	120	97,44	1559,04	102,57
17	100	119,97	2039,49	106,59
18	60	152,67	2748,06	110,60
19	180	116,73	2217,87	114,62
20	150	121,8	2436	118,63
	Sum Dt	1609,87		
	Sum tDt	19573,22		
	b	4,014414		
	a	38,34216		

ويظهر الشكل البياني الخاص بالانحدار الخطي الذي تحصلنا عليه في:



وتكون التنبؤات كما يلي (علما أنه يكون التنبؤ أولا بالعلاقة الرياضية المحصل عليها دون نسيان إعادة الموسمية الملاحظة بالنسبة لكل فصل):

$DF_{20,21} = a_{20} + r * b_{20} = a_{20} + 1 * b_{20} = 118{,}63 + 1 * 4 = 122{,}63$

$F_{20,21} = D_{20,21} * c_{ربيع} = 122{,}63 * 0{,}8335 = 102{,}21$

*$DF_{20,22} = a_{20} + r * b_{20} = a_{20} + 2 * b_{20} = 118{,}63 + 2 * 4 = 126{,}63$

$F_{20,22} = DF_{20,22} * c_{صيف} = 126{,}63 * 0{,}3930 = 49{,}77$

*$DF_{20,23} = a_{20} + r * b_{20} = a_{20} + 3 * b_{20} = 118{,}63 + 3 * 4 = 130{,}63$

$F_{20,23} = DF_{20,23} * c_{خريف} = 130{,}63 * 1{,}5420 = 201{,}43$

*$DF_{20,24} = a_{20} + r * b_{20} = a_{20} + 4 * b_{20} = 118{,}63 + 4 * 4 = 134{,}63$

$F_{20,24} = DF_{20,24} * c_{شتاء} = 134{,}63 * 1{,}2315 = 165{,}8$

طريقة Holt :

- حساب a_{16} و b_{16}

- $a_{16} = 102{,}57$

  $b_{16} = 4$

- حساب $DF16_{,17}$

- $DF_{16,17} = 102{,}57 + 1 * 4 = 106{,}57$
- $F_{16,17} = 106.57 * 0.8335 = 88.8$

- حساب a17 et b17

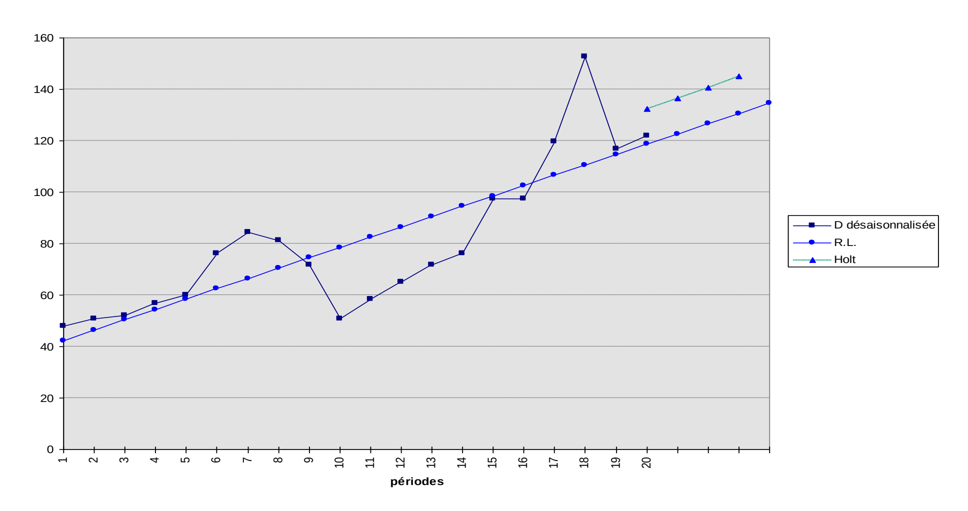
- $a_{17} = 0{,}3 * 120 + 0{,}7 * 106{,}57 = 36 + 74{,}6 = 110{,}6$
- $b_{17} = 0{,}04 * (110{,}6 - 102{,}57) + (1 - 0{,}04) * 4 = 0{,}32 + 3{,}84 = 4.16$

- حساب DF17,18
- $DF_{17,18} = 110,6 + 4,16 = 114,76$
- $F_{17,18} = 114,76 * 0,393 = 45,1$
- حساب a18 et b18
- $a_{18} = 0,3 * 153 + 0,7 * 114,76 = 126,23$
- $b_{18} = 0,04 * (126,23 - 110,6) + 0.96 * 4,16 = 4,62$
- حساب DF18,19
- $DF_{18,19} = 130,85$
- $F_{18,19} = 130,83 * 1,542 = 201,77$
- حساب a19 et b19
- $a_{19} = 0,3 * 117 + 0,7 * 130,85 = 126,7$
- $b_{19} = 0,04 * (126,7 - 126,23) + 0,96 * 4,62 = 4,454$
- حساب DF19,20
- $DF_{19,20} = 131,154$
- $F_{19,20} = 131,154 * 1,2315 = 161,51$
- حساب a20 et b20
- $a_{20} = 0,3 * 122 + 0,7 * 131,154 = 128,41$
- $b_{20} = 0,04 * (128,41 - 126,7) + 0,96 * 4,454 = 4,34$
- التنبؤات للفصول الأربعة تكون:
- $DF_{20,21} = 132,75$
- $F_{20,21} = 132,75 * 0,8335 = 110,65$

- $DF_{20,22} = 128,41 + 2 * 4,34 = 137,09$
- $F_{20,22} = 137.09 * 0,393 = 53,88$

- $DF_{20,23} = 128,41 + 3 * 4,34 = 141,43$
- $F_{20,23} = 141,43 * 1,5420 = 218,09$

- $DF_{20,24} = 128,41 + 4 * 4,34 = 145.77$
- $F_{20,24} = 145.77 * 1,2315 = 179,52$



يجب تعديل مجموع معاملات الموسمية حتى تكون مساوية للواحد الصحيح:

	Avant	Après normalisation
$c_{\text{خريف}}$	1,52	1,5284
$c_{\text{شتاء}}$	1,2315	1,2383
$c_{\text{ربيع}}$	0,8335	0,8381
$c_{\text{صيف}}$	0,393	0,3951
Somme	3,978	4

وبالتالي يتم تعديل النتائج السابقة كما يلي:

$a_{21} = 0,3 * (120/0,8381) + 0,7 * 132,75 = 135,88$

$b_{21} = 0,04 * (135,88 - 128,41) + 0,96 * 4,34 = 4,47$

$DF_{21,22} = 140,35$

$F_{21,22} = 140,35 * 0,3951 = 55,45$

$DF_{21,23} = 135,88 + 2 * 4,47 = 144,82$

$F_{21,23} = 144,82 * 1,5284 = 221,34$

$DF_{21,24} = 135,88 + 3 * 4,47 = 149,29$

$F_{21,24} = 149,29 * 1,2383 = 184,87$

$DF_{21,25} = 135,88 + 4 * 4,47 = 153,76$

$F_{21,25} = 153,76 * 0,8381 = 128,87$

طريقة وينترز Winters :

$F_{20,21} = (128,41 + 4,34) * 0,8335 = 110,65$

$F_{20,22} = (128,41 + 2 * 4,34) * 0,3930 = 53,88$

$a_{21} = 0,3 (120 / 0,8335) + (1-0,3) (128,41 + 4,34) = 136,116$

$b_{21} = 0,04 (136,116 - 128,41) + (1 - 0,04) 4,34 = 4,475$

$c_{\text{ربيع}} = 0,1 (120 /136,116) + (1 - 0,1) 0,8335 = 0,8383$

تعديل مجموع معاملات الموسمية حتى تكون مساوية للواحد الصحيح:

	Avant	Après normalisation
$c_{\text{ربيع}}$	0,8383	0,8373
$c_{\text{صيف}}$	0,3930	0,3925
$c_{\text{خريف}}$	1,5420	1,5402
$c_{\text{شتاء}}$	1,2315	1,23
المجموع	4,0048	4

$F_{21,22} = (136,116 + 4,475) * 0,3925 = 55,182$

$F_{21,23} = (136,116 + 2 * 4,475) * 1,5402 = 223,431$

MAD للتأكد من مصداقية النموذج:

t	Dt	DDt	R.L.	Et	Et absolues
1	40	47,99	42,36	5,63	5,63
2	20	50,89	46,37	4,52	4,52
3	80	51,88	50,39	1,49	1,49
4	70	56,84	54,40	2,44	2,44
5	50	59,99	58,41	1,58	1,58
6	30	76,34	62,43	13,91	13,91
7	130	84,31	66,44	17,87	17,87
8	100	81,2	70,46	10,74	10,74
9	60	71,99	74,47	-2,48	2,48
10	20	50,89	78,49	-27,60	27,60
11	90	58,37	82,50	-24,13	24,13
12	80	64,96	86,52	-21,56	21,56
13	60	71,99	90,53	-18,54	18,54
14	30	76,34	94,54	-18,20	18,20
15	150	97,28	98,56	-1,28	1,28
16	120	97,44	102,57	-5,13	5,13
17	100	119,97	106,59	13,38	13,38
18	60	152,67	110,60	42,07	42,07
19	180	116,73	114,62	2,11	2,11
20	150	121,8	118,63	3,17	3,17

=> $MAD_{20} = 11,89$

$\sigma = 1,25 * 11,89 = 14,86$

ففي جدول التوزيع الطبيعي، ما هي القيمة الموافقة للاحتمال.% 1:

=>$Z = 2,3$

=> I.C. = [122,63 +/- 2,3 * 14,86] = [88,452; 156,808]

$MAD_{21} = 0,1 * | F_{20,21} - D_{21} | + 0,9 * 11,89 = 0,1 * | 122,63 - 120 / 0,8381 | + 10,107 = 12,16$

الفصل الثاني
البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية إحدى الطرق الشائعة من بحوث العمليات. وقد عرفت هذه الطريقة تطورا سريعا بفضل DANTZING وهو من قدم أسلوب السمبلاكس. وقد أثبتت الدراسة التي أقيمت من طرف مجموعة IBM أن أكثر من 25 % من الحاسبات العلمية التي تعمل بمساعدة الحاسوب استعملت فيها البرمجة الخطية أو تقنيات مشابهة. فالبرمجة الخطية تعتبر أهم الأساليب الرياضية الأكثر استعمالا وتداولا.

- تعريف البرمجة الخطية وشروط استخدامها:

- هي عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم في إيجاد الحل الأمثل لكيفية استخدام المشروع لموارده.
- هي أداة أو وسيلة تساهم في عملية اتخاذ القرار الإداري بصدد توزيع الموارد البشرية والمادية بين أفضل الإستخدامات المتنافسة قصد تحقيق أقصى عائد مادي أو تحقيق أقل تكلفة مادية أو اجتماعية ممكنة.
- هي عبارة عن أسلوب رياضي يساعد المسير في اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع وتخصيص الموارد المحدودة والنادرة وغير المتجانسة بين الأنشطة أو المنتجات بشكل أمثل لتحقيق أعظم ربح أو ايراد أو رقم أعمال...الخ، أو أدنى تكلفة.

و"البرمجة الخطية" تتكون من كلمتين:

*__البرمجة__: أما كلمة البرمجة فتشير إلى أن التكتيك الرياضي المستخدم هو لإيجاد الحل، أي يقصد بها إعداد برنامج مع مراعاة الإمكانيات المادية، البشرية والمالية وذلك لتحقيق هدف معين.

*__الخطية__: وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقة ين المتغيرات المكونة للمشكلة المدروسة هي علاقة خطية، أي يقصد بها وجود علاقة

خطية تربط بين المتغيرات سواءا في دالة الهدف أو في القيود، ويتم التعبير عنها بطريقة رياضية.

أي أن البرمجة الخطية هي طريقة رياضية لحل بعض المسائل التي لها هدف واضح ومصطلح الخطية يعني أن هناك علاقات خطية بين متغيرات النموذج وهي بمثابة قيود معينة عليها كما أن هناك شروطا محددة لإستخدامها.

- شروط استخدام البرمجة الخطية:

1. وجود هدف.
2. محدودية الموارد البشرية.
3. توفر استخدامات متنافسة أو وجود مجموعة من الإستخدامات التي تشترك في الموارد المتاحة.
4. إمكانية التعبير عن المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية.
5. أن تكون العلاقة بين المتغيرات الخاضعة للبرمجة علاقة خطية.
6. أن تكون علاقات رياضية بين المتغيرات من الدرجة الأولى.

- استخدامات البرمجة الخطية:

تتمثل أهم استخدامات البرمجة الخطية في:

- تخطيط الإنتاج: تعتبر البرمجة الخطية وسيلة فعالة لتوزيع الموارد على السلع المراد إنتاجها وتؤدي إلى تحقيق أعلى ربح
- تخطيط الإستثمار: تساعد المنشأة أو المستثمر على تعظيم أرباحه من خلال توزيع الأموال المتاحة على المستثمرات المبرمجة.
- تخطيط التوزيع: تساعد البرمجة الخطية على توزيع المنتجات التي تنتجها المنشأة من خلال عدة مصانع على الأسواق المختلفة وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

- توزيع العمل: تساعد المنشأة على توزيع العاملين على مواقعهم بطريقة من شأنها تخفيض التكلفة إلى أدنى حد ممكن.
- التخطيط للدعاية والإعلان: يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها في مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلى وذلك تحت عدد من القيود مثل قدرة السوق الإستيعابية، محدودية الموارد المالية، الحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من الوسائل الإعلامية، بالإضافة إلى تخطيط التموين، التخزين....

الشكل العام للنموذج الرياضي:

يتكون الشكل العام للنموذج الرياضي من؛

أـ دالة الهدف :

$$} = C1 \ X1 + C2 \ X2 + C3 \ X3 + \ldots\ldots + CM \ XM$$
(MIN C /MAXZ

- في حالة MAXZ فإن $C1, C2, C3, \ldots\ldots CM$ تمثل مثلا ربح الوحدة المحقق.
- في حالة MIN C فإن $C1, C2, C3, \ldots\ldots CM$ تمثل التكلفة للوحدة.

ب – القيود :

$$A1X1+A2X2+\ldots\ldots+ANXN \leq\geq B1$$

$$A'1X1+A'2X2+\ldots\ldots+A'NXN \leq\geq B'$$

$A1,A1\ldots, A'1,A'2\ldots$: تدعى المعاملات التقنية أو المعاملات الفنية وهي التي تحدد القيود الخاصة بالبرمجة الخطية.

B: عدد الوحدات المتاحة من المورد الأول ، 'B : عدد الوحدات المتاحة من المورد الثاني.

جـ: شرط عدم السلبية:

$$X1\geq 0,\ X2\geq 0,\ \ldots\ldots,\ XN\geq 0$$

وعموما: يأخذ **النموذج الرياضي ثلاثة أشكال:**

1) **الشكل العام**: هو النموذج الرياضي الذي نجد فيه قيودا بجميع أشكال المتراجحات والمعادلات.

2) **الشكل المعياري**: سيتم توضيحه أثناء حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة الجداول.

3) **الشكل النموذجي أو النظامي**: نجد أن شكل المتراجحات أو اتجاهها هو نفسه بالنسبة لجميع القيود (المثال السابق).

مثال:

نفترض لدينا مؤسسة معينة تنتج منتوجين طاولات وكراسي. للإنتاج تحتاج المؤسسة إلى مواد أولية ولتكن المادتين الخشب والحديد. لدينا المعلومات الخاصة بالعملية الانتاجية؛

- لإنتاج كرسي نحتاج إلى 1م خشب و 4 م^2 حديد.
- لإنتاج طاولة نحتاج إلى 3م خشب و 10 م^2 حديد.
- كل طاولة تحقق ربحا بقيمة 5دج وكل كرسي يحقق ربحا بقيمة 2 دج.

السؤال: كم يجب أن تنتج من الطاولات والكراسي لنحقق أقصى ربح ؟

يبدو للوهلة الأولى أننا سنكون توليفات مثلا (2 ط ,5 كـ) أو (100 ط , 100كـ) وما يقابلها من أرباح ولكن هذه الطريقة غير ممكنة وغير عملية . لذا لحل هذا المشكل – نستعمل طريقة رياضية هي البرمجة الخطية وذلك في ظل قيود معينة **مثل:** محدودية المادة الأولية في هذا المثال.

لهذا السبب الأخير فإننا نحتاج إلى معلومات أخرى فيما يخص المواد ولحل أية مسالة في البرمجة الخطية أو في بحوث العمليات عموما يجب أن نكون ما يسمى بالنموذج الرياضي وهي ترجمة وتحويل المشكل إلى أرقام ورموز وعلاقات رياضية.

ولتكوين النموذج الرياضي نحتاج إلى ثلاثة عناصر:

معرفة الهدف الذي نبحث عنه أو تكوين دالة الهدف، والهدف هو تحقيق أكبر ربح (نرمز بأعظم ربح بالرمز MAX Z , ولأقل تكلفة بالرمز MIN C)

أي ؟= MAXZ , MIN C =?

الربح = الربح الناتج عن الطاولات + الربح الناتج عن الكراسي

* الربح الناتج عن الطاولات = ربح الطاولة * عدد الطاولات .

* الربح الناتج عن الكراسي = ربح الكراسي * عدد الكراسي .

ليكن $x1$ عدد الطاولات , $x2$ عدد الكراسي، أي:

$$MAXZ = 5\ x1 + 2\ x2$$

القيود:

- قيد الخشب (عدد الوحدات المستخدمة من الخشب للطاولة * عدد الطاولات + عدد الوحدات المستخدمة للكرسي *عدد الكراسي) ≤ 100م^2.

أي :
$$3\ x1 + x2 \leq 100$$

- قيد حديد : (عدد الوحدات المستخدمة من الحديد للطاولة x عدد الطاولات + عدد الوحدات المستغلة للكرسي x عدد الكراسي) ≤100م2 .

أي :
$$10\ x\ 1 + 4\ x\ 2 \leq 100$$

شرط عدم السلبية:

فالشرط ألا نجد قيما سالبة فيما يخص عدد الوحدات المنتجة ؛

أي : $x1 \geq 0$ و $x2 \geq 0$

ومنه يتكون النموذج الرياضي كما يأتي:

1 - دالة الهدف : $MAXZ = 5\ x1 + 2\ x\ 2$

2- القيود : $10x_1 + 4x_2 \le 100$

$$3x_1 + x_2 \le 100$$

3- شرط عدم السلبية : $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

المثال 1 :

تنتج مؤسسة معينة منتوجين Y ,X بحيث تكلفة X 5دج /وحدة وتكلفة Y 6 دج / للوحدة. يحتاج X إلى 3 وحدة من المادة E ووحدتين من المادة الأوليةF . بينما يحتاج Y إلى 1,5 وحدة من E و5 وحدات منF. إذا علمنا أن مخزون المؤسسة من المادة E هو 500 وحدة و من المادة F 600 وحدة ، كم يجب ان تنتج المؤسسة من المنتوج X و المنتوج Y بحيث تكون التكلفة في حدها الأدنى ؟

المثال 2:

تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين X وY بحيث تحقق من بيع X : 10 دج /للوحدة ، وتحقق من بيع Y : 21 دج /للوحدة. علما أنهما سيمران على ثلاثة أقسام إنتاجية ليتم تصنيعهما. لكن الوقت المستغل بالنسبة لكل منتوج يختلف من قسم إلى آخر بالنسبة لكل منتوج . وذلك حسب الجدول التالي :

	القسمA	القسمB	القسمC
X	4	5	3
Y	2	5	4

علما أن ساعات العمل المتاحة في القسم A هي 200 ساعة و في القسم B هي 150 ساعة وفي القسم C 100 ساعة. ما هو عدد الوحدات اللازم إنتاجها من كل منتوج بحيث يكون الربح في حده الأقصى. (تكوين النموذج الرياضي فقط).

طرق حل مسائل البرمجة الخطية:

يمكن حل مسائل البرمجة الخطية بطرق مختلفة؛

الطريقة الجبرية: (méthode algébrique)

$$MAX\ Z=4X1+5X2$$

$$2X1+2X2\leq 20$$

$$3X1+X2\leq 30$$

$$X1,X2\geq 0$$

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ثم نقوم بضرب المعادلة الثانية في القيمة (-2) ثم بالجمع، أي:

$$2X1+2X2=20$$

$$(-2)\rightarrow \underline{\ 3X1+X2=30\ }$$

$$-4X1+0=-40$$

$$\Rightarrow \mathbf{X1=10}$$

بالتعويض في المعادلة1 أو 2، نحصل على: $X2=0$

ثم نقوم بالتعويض في دالة الهدف وذلك من أجل تعظيم الربح المقدر بـ

$$\mathbf{MAX\ Z=4(10)=40}$$

يتم إنتاج 10 وحدات من $x1$ ولاشيىء من $x2$ ويكون أعظم ربح هو **40 دج.**

الطريقة البيانية (méthode graphique) :

الطريقة البيانية هي حل المتراجحات بشكل بياني. حيث محور السينات يمثل المنتوج الأول$X1$، محور العينات يمثل المنتوج الثاني $X2$.

نتناول **المثال التالي:**

تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين X و Y بحيث تحقق من بيع X : 30 دج /للوحدة ، وتحقق من بيع Y : 20 دج /للوحدة. علما أنهما سيمران على ثلاثة أقسام إنتاجية ليتم تصنيعهما. لكن الوقت المستغل بالنسبة لكل منتوج يختلف من قسم إلى اخر بالنسبة لكل منتوج . وذلك حسب الجدول التالي:

	النجارة	التلحيم	الطلاء
X	6	3	4
Y	6	6	2

علما أن ساعات العمل المتاحة في قسم النجارة هي 420 ساعة و في قسم التلحيم هي 300 ساعة وفي قسم الطلاء 240 ساعة. ماهو عدد الوحدات اللازم إنتاجها من كل منتوج بحيث يكون الربح في حده الأقصى.

ومنه يتكون النموذج الرياضي كما يأتي:

MAX Z =30X1 + 20 X2

6X1 + 6 X2 <= 420

3X1 + 6 X2 <= 300

4X1 + 2 X2 <= 240

X1, X2 >= 0

(لاحظ أنه بالرغم من وجود متغيرين فقط إلا أنه لا يمكن حل هذه المجموعة من المتراجحات بالطريقة السابقة). وبالتالي نستعمل الطريقة البيانية:

نرسم في شكل بياني مختلف القيود:

القيد الأول:

$$6x_1 + 6x_2 \leq 420$$

$$si : x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 70$$
$$si : x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 70$$

نرسم المستقيم الذي يمر على النقطتين (0،70) و (70،0)

القيد الثاني:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 300$$

$$si : x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 50$$
$$si : x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 100$$

نرسم المستقيم الذي يمر على النقطتين(0،50) و (0،100)

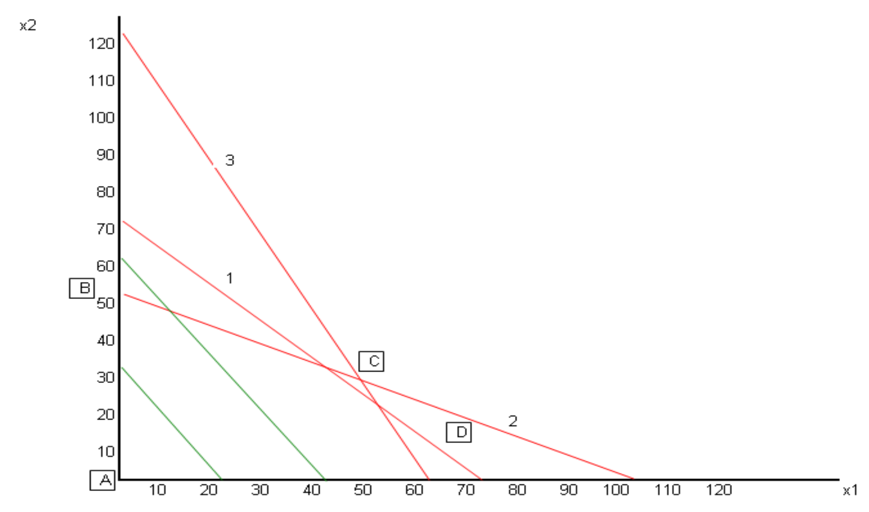
القيد الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$si : x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 120$$
$$si : x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 60$$

نرسم المستقيم الذي يمر على النقطتين(0،120) و (0،60)

تحديد منطقة الحلول الممكنة

هي المنطقة التي تتحقق فيها جميع قيود المسألة. إذا كان لدينا نقطة تقاطع مستقيمين نقوم بحل جملة معادلتين للمستقيمين. بعد إيجاد نقاط تقاطع المثلثات المختلفة يتم تحديد ما يدعى بنقاط الأركان (النقاط المميزة في الشكل).



النقطة C هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني:

الأول: $6X_1 + 6X_2 \leq 420$

الثاني: $3X_1 + 6X_2 \leq 300$

$$X_1 = 40$$

$$X_2 = 30$$

النقطة D هي تقاطع القيدين الأول والثالث:

الأول: $6X_1 + 6X_2 \leq 420$

الثالث: $4X_1 + 2X_2 \leq 240$

$$X_1 = 120$$
$$X_2 = 50$$

إيجاد البرنامج الإنتاجي الأمثل

من خلال رسم خطوط دالة الهدف ، نختار الأفضل منها:

$$Max(Z) = 30x_1 + 20x_2$$

ملاحظة : تزيد قيمة دالة الهدف كلما ابتعدنا عن نقطة الأصل.

البرنامج الإنتاجي الأمثل يتواجد دائما على أحد أركان الحلول الممكنة وبالتالي نبحث عن الحل الأمثل في هذه المنطقة.

نقطة الإنتاج	*حجم الإنتاج*		*دالة الهدف (دينار)*	*الطاقات المستغلة في القسم (ساعة)*		
	X_1	X_2	$Z=30X_1+20X_2$	النجارة	التلحيم	**الطلاء**
A	**0**	**0**	**0**	**420**	**300**	**240**
B	**0**	**50**	**100**	**120**	**0**	**140**
C	**40**	**30**	**1800**	**0**	**0**	**20**
D	**50**	**20**	**1900**	**0**	**30**	**0**
E	**60**	**0**	**1800**	**60**	**120**	**0**

النقطة D تمثل أحسن برنامج إنتاجي لأنها تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف.

القيود التي تحدد نقطة الحل الأمثل تستغل بالكامل ويطلق عليها اسم قيود الطاقات النادرة التي تشارك في تحديد نقطة الحل الأمثل وتحديد منطقة الحلول الممكنة.

مثال(2): بالعودة للمثال السابق في الطريقة الجبرية؛

2X1+2X2=20

$$X1=0 \Rightarrow X2=10$$

$$\underline{X2=0 \Rightarrow X1=10}$$

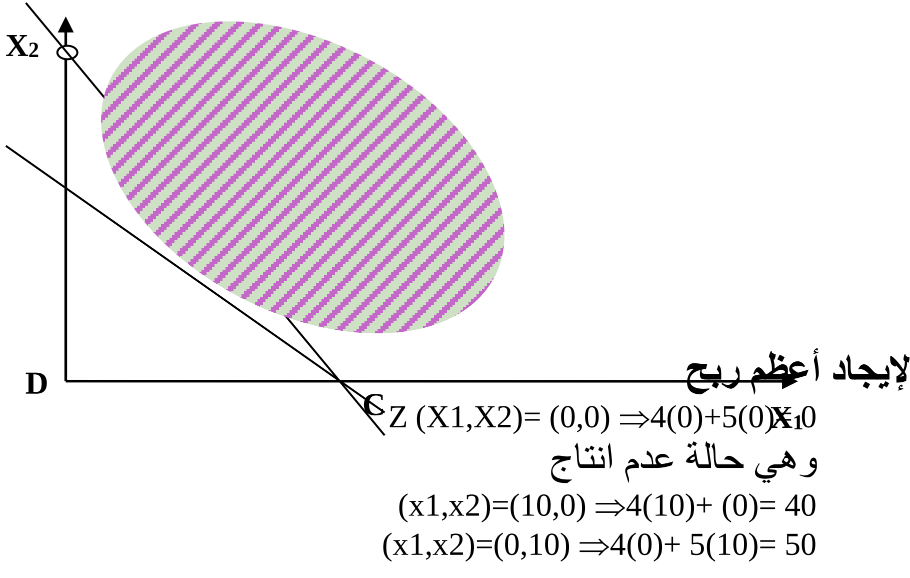
$$3X1+X2=30$$

$$X1=0 \Rightarrow X2=30$$

$$X2=0 \Rightarrow X1=10$$

يتم تحديد ما يدعى بنقاط الأركان (النقاط المميزة في الشكل):

$(X1,X2)=(10,0)$, $(X1,X2)=(0,10)$,$(X1,X2)= (0,0)$



لإيجاد أعظم ربح

$Z\ (X1,X2)= (0,0) \Rightarrow 4(0)+5(0)=0$

وهي حالة عدم انتاج

$(x1,x2)=(10,0) \Rightarrow 4(10)+ (0)= 40$

$(x1,x2)=(0,10) \Rightarrow 4(0)+ 5(10)= 50$

هي أحسن توليفة مادامت تقدم أعظم ربح.

طريقة الجداول: Simplex :

يتم الحل في هذه الطريقة بالجداول. يجب تحويل النموذج المتوفر لدينا (العام أو النموذجي) إلى النموذج المعياري.

يجب أن نضيف ما يسمى بمتغيرات الإنحراف في القيود. يمثل الجدول الأول جدول حالة عدم الإنتاج. وتتم التحسينات حتى نتحصل على أعظم ربح أو أقل تكلفة.

ملاحظة: متغيرات الإنحراف هي ثلاثة أشكال:

- متغيرات فوارق إذا كانت المتراجحة من الشكل أقل أو يساوي ≤

$$\Rightarrow \quad a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + A_1 = B$$
$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \leq B$$

- متغيرات الزيادة ومتغيرات اصطناعية إذا كانت المتراجحة من الشكل أكبر أو يساوي ≤

$$\Rightarrow \quad a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n - A_1 + A_2 = B$$
$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \geq B$$

- متغيرات اصطناعية (خيالية) إذا كانت القيود من النوع مساواة (=)

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + A_1 = B \Rightarrow$$
$$[(a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = B]$$

وتصبح دالة الهدف، مثلا، في حالة نموذج نظامي يحتوي على المتراجحات من الشكل أقل أو يساوي ≤ كما يلي:

$$\Rightarrow \quad Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n + 0A_1 + 0A_2 + ... + 0A_k$$
$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

أما بالنسبة لشرط عدم السلبية، فيكتب؛

$$X_1,\ X_2, ...\ ,\ A_1,\ ...,\ A_2 \quad A_k \geq 0$$

مثال(1)

2X1+2X2≤ 20

3X1+X2≤ 30

2X1+2X2+**A1**=20/ (0≤A1≤20)

3X1+X2+**A2**=30/ (0≤A2≤30)

مثال (2)

2X1+2X2≥20

$3X1+X2\geq 30$

$2X1+2X2-\mathbf{A1+A3}=20$ / $(0\leq A1)$

$3X1+X2-\mathbf{A2+A4}=30$ / $(0\leq A2)$

مثال(3)

$2X1+2X2=20$

$3X1+X2=30$

$2X1+2X2+\mathbf{A1}=20$

$3X1+X2+\mathbf{A2}=30$

يجب وضع هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل (صفر) لمتغيرات الفوارق أو متغيرات الزيادة، والمعامل(م) للمتغيرات الاصطناعية.

ونعدل أيضا في الشرط الثالث (عدم السلبية): $x1,x2, A1,A2 \geq 0$

معاملات المتغيرات في دالة الهدف	الكميات	المتغيرات	معاملات دالة الهدف
متغيرات دالة الهدف			
مصفوفة المشكلة المراد حلها			
سطر التقييم	قيمة دالة الهدف		

في المثال السابق، مادامت المتراجحات من النوع ≤ نضيف:

$2x1+2x2+A1=20$/ $(0\leq A1\leq 20)$

$3x1+x2+A2=30$/ $(0\leq A2\leq 30)$

يجب وضع هذه المتغيرات في دالة الهدف:

$Max\ z= 4x1+5x2+0A1+0A2$

ونعدل أيضا في الشرط الثالث (عدم السلبية) $x1,x2, A1,A2 \geq 0$

الجدول الأول: جدول حالة عدم الإنتاج ومنه تتم التحسينات حتى نتحصل على أعظم ربح.

من خلال جدول السمبلكس الأولي، لدينا حالة عدم إنتاج أي كل قيم المتغيرات : X_1، X_2، ...، X_n مساوية للصفر. ووجود A_1، A_2، ...، A_k في عمود الكميات يدل على أن كل الطاقات غير مستغلة (عاطلة). أما قيمة (Z) المعدومة فهي تعني أن الربح وفقا لهذا الحل سيكون صفرا. وأما معاملات دالة الهدف الموجودة على يمين (Z) في الجدول فهي تمثل صافي الربح الناجم عن : X_1، X_2، ...، X_n.

معاملات دالة الهدف	المتغيرات	الكميات	4	5	0	0
			X1	X2	A1	A2
0	A1	20	2	2	1	0
0	A2	30	3	1	0	1
Z= 0			4-	5-	0	0

بالنسبة لسطر التقييم الموجود على يمين (Z) فإن قيمه تحسب بالطريقة التالية :

قيمة سطر التقييم = معامل المتغير المقابل لهذه القيمة في دالة الهدف − جداء عمود المصفوفة لهذه القيمة مع عمود المعاملات المقابلة لها

على سبيل المثال : القيمة (4-) الموجودة في سطر التقييم =

(معامل المتغير المقابل لهذه القيمة في دالة الهدف)

$$C_1 = 0 - C_1 = [(0\times a_{21}) + (0\times a_{11})] -$$

$$= [(0\times 2) + (0\times 3)] = -1$$

أما قيمة (Z) في نفس الجدول فتحسب عن طريق جداء عمود الكميات بعمود المعاملات.

$$0 = (0\times 20) + (0\times 30) = Z$$

Z=Σ (الكميات * معاملات دالة الهدف)

سطر التقييم = (العمود الأول * قيم x1)- المتغيرات لـ x1

اختبار مثالية الحل : يتم من خلال هذه الخطوة القيام باختبار بسيط لمعرفة ما إذا كان الحل المتوصل إليه أمثلا أم لا. ففي حالة تعظيم الربح $Max(Z)$ ، إذا كانت كل القيم الموجودة في سطر التقييم هي قيم صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون حلا أمثلا، وإذا كانت قيمة واحدة أو أكثر سالبة فإن الحل لا يعد أمثلا. أما في حالة تقليل التكاليف $Min(C)$ ، إذا كانت كل القيم الموجودة في سطر التقييم هي قيم صفرية أو سالبة فإن الحل يكون أمثلا، وإذا كانت قيمة واحدة أو أكثر ذات قيمة موجبة فإن الحل لا يعد أمثلا.

إذا وجدت هناك قيمة سالبة في سطر التقييم فان هذا الحل ليس أحسن حل، بل يجب تحسينه.

تحسين الحل : عند وجود قيم سالبة في الصف الأخير في حالة التعظيم يعني ذلك أن الحل ليس أمثلا، ومعنى ذلك أن أي تغيير في قيم كل من : X_1، X_2، ...، X_n يترتب عليه زيادة الأرباح، وهذا ما يستدعي البحث عن حل أفضل وذلك من خلال إدخال المتغير الذي يعطي أكبر عائد ممكن إلى الحل وبافتراض أن C_2 هو الأكبر بالقيمة المطلقة في سطر التقييم الذي يمثل المتغير X_2 فذلك يعني أنه يجب إدخال X_2 في الحل قبل أي متغير آخر، وبذلك يسمى العمود الذي يقابل أكبر عائد (C_2) بالعمود الأمثل.

بعد تحديد المتغير الداخل، يتم تحديد المتغير الخارج وذلك بقسمة عناصر عمود الكميات على عناصر العمود الأمثل، ويكون المتغير المقابل لأقل قيمة موجبة ناجمة عن عملية القسمة تلك هو المتغير الذي يجب استبداله وإدخال المتغير الداخل محله. وليكن المتغير الخارج هو : A_2 ، وبالتالي يحل المتغير X_2 محل المتغير A_2 .

بعد تحديد المتغير الخارج تأتي مرحلة إيجاد قيم الصف الجديد المترتب على عملية الاستبدال وذلك بقسمة جميع عناصر الصف

المستبدل على المحور (نقطة تقاطع العمود الأمثل مع صف المتغير الخارج) ليصبح الجدول كما يلي :

يتم ذلك باختيار أقل قيمة سالبة (-5) (أكبر قيمة مطلقة في القيم السالبة). فالقيمة التي سيتم اختيارها ستحدد ما يدعى المتغيرة الداخلة وهي x2، ثم تحدد ما يسمى بالمتغيرة الخارجة.

يتم تحديد هذه المتغيرات الخارجة من خلال قسمة العمود الخاص بالكميات على عمود معاملات المتغيرة الداخلة واختيار أقل قيمة منها.

($\frac{20}{2}$ =10) ، ($\frac{30}{1}$ =30) أي القيمة 10 ، وهي توافق المتغيرة A1 ، تدعى A1 بالمتغيرة الخارجة. ثم نعيد إعداد الجدول.

تدعى نقطة التقاء سطر المتغيرة الخارجة بعمود المتغيرة الداخلة بالمحور (pivot).

تصبح قيمة المحور في الجدول الجديد عبارة عن واحد(1) وبقية عناصر عموده هي أصفارا، أما السطر الخاص بالمحور فيتم الحصول عليه من خلال السطر القديم بعد قسمته على قيمة المحور.

بالنسبة للعمود الأمثل يصبح كله أصفار عدا قيمة المحور التي تستبدل بـ : 1 كما سبق وأن حسبت. أما باقي القيم الموجودة في الجدول فتحسب بالصيغة التالية :

القيمة الجديدة = القيمة القديمة − $\frac{\text{جداء القيمتين المقابلتين لها}}{\text{قيمة المحور}}$

فمثلا القيمة الجديدة لـ : a_{11} في الجدول الموالي لجدول الحل المبدئي هي : $a_{11} - \frac{a_{21} \times a_{12}}{a_{22}}$

أي لحساب باقي القيم نستعمل العلاقة:

القيمة القديمة – قيمة عنصر سطر المحور x قيمة عنصر عمود المحور / المحور وبهذا يصبح الجدول كالآتي :

معـــاملات دالـــة الهدف	المتغيرات	الكميات	4	5	0	0
			X1	X2	A1	A2
5	X2	10	1	1	1/2	0
0	A2	20	2	0	-1/2	1
Z = 50			1	0	5/2	0

بعد حساب قيم سطر التقييم، إذا وجد أن كل القيم صفرية أو موجبة (حالة تعظيم الأرباح) فإن ذلك يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل. أما إذا كانت هناك قيمة أو أكثر سالبة في هذا السطر فإنه لا بد من البحث عن حل أفضل وذلك بإتباع نفس الخطوات التي سبق ذكرها.

يتم شرح هذا الحل من خلال :

الربح إنتقل إلى 50 لأن هناك إنتاج X2=10 .

A2=20 معناه نذهب للقيد الثاني و هو خاص بالمادة الأولية الثانية هذا يعني أن 20 وحدة من المادة الأولية الثانية لم يتم إستغلالها، لدينا :

$$X1=0 , X2=10$$

$$2X1+2X2+A1=20$$

$$3X1+X2+A2=30$$

نعوض بقيم X1 , X2 المتحصل عليها في الحل؛

$$2(0)+2(10)+A1=20 \Rightarrow A1=0$$

أي المورد الأول مستغل تماما في المنتوج الثاني.

$$3(0)+10+A2=30 \Rightarrow A2=20$$

أي الكمية غير المستغلة في المورد الثاني والباقية هي 20وحدة.

طالما هناك قيما سالبة في سطر التقييم فإن عملية التحسين تبقى مستمرة بنفس الطريقة المذكورة سابقا. إذا وجدت هناك قيمة سالبة في سطر التقييم فهي ليست أحسن حل، بل يجب تحسينه وذلك باختيار أقل قيمة سالبة (أكبر قيمة مطلقة في القيم السالبة). فالقيمة التي سيتم اختيارها ستحدد ما يدعى المتغيرات الداخلية لـ X. ثم يجب تحديد ما يسمى بالمتغيرات الخارجة. يتم تحديد هذه المتغيرات الخارجية من خلال قسمة العمود الخاص بالكميات على عمود المتغيرات الداخلة وتحديد أقل قيمة.

قيم سطر التقييم هي ذات نوعين :

1- فيما يخص المتغيرات التي دخلت للحل فإن قيمتها في سطر التقييم هي أصفار.

2- فيما يخص المتغيرات التي لم تدخل الحل والمتعلقة بالمواد الأولية أي A1 فالقيمة الموجودة في سطر التقييم لـ A1 تدعى **بسعر الظل** أي 5/2. **أو**الخاصة بـ X1 (منتوج) فتدعى **بتكلفة التضحية** 5/2 معناه كلما نضيف وحدة واحدة من المورد الأول فإن الربح يزيد بـ 5/2 دج.

لو أخذنا النموذج : $MAXZ = 4x1 + 5x2$

نجد الربح الجديد في حالة إضافة وحدة واحدة من المورد الأول هو:

$$Z = 50 + \frac{5}{2}$$

$$Z = \frac{105}{2}$$

1/2 تعني أن الوحدة الإضافية من المورد الأول ستؤثر على المنتوج الثاني بزيادة إنتاجية 1/2 وحدة. (1/2 نقطة إلتقاء A1 و X2 أي عند زيادة A1 بوحدة يؤثر على X2 بالإيجاب أي $x2 = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$)

لو أضفنا من المورد الأول 3 وحدات ماهو النموذج الرياضي الجديد وماهو الحل في رأيكم ؟

يتغير القيد الأول في النموذج الرياضي $2x1+2x2\leq 23$ و باقي المعطيات تبقى كما كانت.

أما الحل هو: $Z=50+\frac{15}{2}$

$$Z=\frac{115}{2}$$

أما التأثير على المنتوج الثاني سيكون : $x2=10+\frac{3}{2}$ ، $x2=\frac{23}{2}$

حل النماذج العامة:

لقد ذكرنا سابقا أن النموذج الذي يحتوي على قيود من الشكل (أقل أو تساوي $\leq$) يتم تحويله الى ؛ $ax1+bx2+A1\leq b$

أما النموذج الذي يحتوي على قيود من الشكل (أكبر أو تساوي $\geq$) نضيف متغيرة زيادة ومتغيرة اصطناعية؛ مثلا: $ax1+bx2\geq c$

$$ax2+bx2-A1=c\rightarrow ax1+bx2-A1+A2=c$$

أي نضيف متغيرة إصطناعية (A2) لأنه في حالة عدم الإنتاج نتحصل على؛

$-A1=c\Rightarrow A1=-c$ ، وهذه النتيجة مرفوضة.

المتغيرة الإصطناعية : هي متغيرة تساعدنا في الحل فقط وليس لها معنى اقتصادي أي لا يمكن أن تظهر في الحل تماما. ما دامت لا يجب أن تظهر في الحل إذن يجب تحميلها بغرامة كبيرة جدا في الحل تدعى(M) تعمل تماما عكس دالة الهدف.

فإذا كانت مسألة MAX فإنها تكون(M–)،

أي : $MAX=ax1+bx2+........+0A1-MA2$

وفي مسألة MIN فإنها تكون (+M)، وتدعى هذه الطريقة بأسلوب M.

$$MIN = ax1 + bx2 + ... + 0A1 + MA2$$

مثال: ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

MAX Z= 6X1+4X2

2X1+3X2≤120

4X1+2X2≤100

X1=10

X2≥20

X1,X2≥0

الحل

تحويل النموذج العام إلى الشكل المعياري:

MAX Z= 6X1+4X2+0A1+0A2-MA3+0A4-MA5

2X1+3X2+A1=120

4X1+2X2+A2=100

X1+A3=10

X2-A4+A5=20

X1,X2,A1 ,A2,A3,A4,A5≥0

يتم حل هذه المسألة بواسطة طريقة السمبلاكس كما يلي:

نعلم ان A4- متغيرة سالبة وتبقى المتغيرة الإصطناعية A5 =20 .

في القيود من النوع ≥، فانه في جدول السمبلاكس الأول الخاص بحالة عدم الإنتاج، فان المتغير الإصطناعي هو الذي يكون مساويا للكمية المباعة، مثلا A5=20.

			6	4	0	0	-M	0	-M	
			X1	X2	A1	A2	A3	A4	A5	
0	A1	120	2	3	1	0	0	0	0	60

0	A2	100	4	2	0	1	0	0	0	**25**
-M	A3	10	1	0	0	0	1	0	0	**10**
-M	A5	20	0	1	0	0	0	-1	0	∝
		Z=-30M	**-M-6**	**-M-4**	**0**	**0**	**0**	**+M**	**0**	

تتم عملية التحسين كما يلي:

			6	***4***	***0***	***0***	***-M***	***0***	***-M***	
			X1	X2	A1	A2	A3	A4	A5	
0	A1	100	0	3	1	0	-2	0	0	**33.33**
0	A2	60	0	2	0	1	-4	0	0	**30**
6	X1	10	1	0	0	0	1	0	0	∝
-M	A5	20	0	1	0	0	0	-1	1	**20**
		Z=-60M-20M	**0**	**-M-4**	**0**	**0**	**6+M**	**+M**	**0**	

إن النتائج المتحصل عليها تتطلب عملية تحسين أخرى؛

			6	***4***	***0***	***0***	***-M***	***0***	***-M***	
			X1	X2	A1	A2	A3	A4	A5	
0	A1	40	0	3	1	0	-2	3	03	**13.33**
0	A2	20	0	2	0	1	-4	2	02	**10**
6	X1	10	1	0	0	0	1	0	0	∝
4	X2	20	0	1	0	0	0	-1	1	**20-**
		Z=140	**0**	**0**	**0**	**0**	**6+M**	**-4**	**4+M**	

وعملية التحسين مرة أخرى تعطينا:

			6	***4***	***0***	***0***	***-M***	***0***	***-M***
			X1	X2	A1	A2	A3	A4	**A5**
0	A1	10	0	0	1	3/2	+4	0	**0**
0	A4	10	0	0	0	½	-2	1	**-1**
6	X1	10	1	0	0	0	1	0	**0**
4	X2	30	0	1	0	½	2	0	**0**
		Z=180	**0**	**0**	**0**	**2**	**M+14**	**0**	**+M**

X1 =10, X2 = 30, X3=X4=0, MAX Z = 180

<u>الحل الأمثل:</u>

- المرحلة الأولى: كانت خسارة تقدر ب-30M ثم انخفضت إلى 60-20M ثم تحقق ربح قدره 140 ثم ارتفع إلى Z=180 و هو أعظم ربح. ننتج 10 وحدات من x1 و30 وحدة من x2

- $A1=10$ بمعنـــى أن مــن المــورد الأول ســيتبقى 10 وحــدات .للتحقــق نعوض في المعادلة $2x1+3x2+A1=120$
- $A4=10$ نعوض في القيد الرابع $x2\geq20$ معناه يجب تخفيض هذه الكميـة في القيد الرابع حتى يكون $x2$ مساويا للقيمة المتحصل عليها في الحل. (الكمية الموجودة $X2=30$ طرحنا منها $A4=10$ نجدها تساوي 20).
- نلاحظ انه لم يظهر أي متغير اصطناعي في الحل النهائي بالرغم من وجوده في الحلول الأخرى.
- كل متغيرة تدخل في الحل التقاء ما بين العمود والسطر تساوي 1.
- المتغيرات التي تدخل في الحل قيمها أصفارا في سطر التقييم.
- القيم الموجودة في سطر التقيـيم للمتغيـرات الإصـطناعية لـيس لهـا معنى.
- قيم سطر التقييم هي سعر الظل أو السعر الحدي أو تكلفة التضحية، وتعني أنه عندما يتم إضافة وحدة واحدة من المورد الثاني(بحكم ان A2 موجود فـي القيـد الثـاني) فـان الـربح سيزيد بــ 02 دج أي يصـبح 182 دج.

وسنعود إلى هذا الموضوع بالتفصيل لاحقا.

مسألة التخفيض

فيما يخص طريقة الحل لمسألة التخفيض، يتم حلها بالطريقة البيانية كما تطرقنا لها سابقا مع اختلاف بسيط جدا في نقاط الأركان يتم حساب التكاليف لها واختيار أقل قيمة. أما في طريقة السمبلاكس فهي الطريقة المعروفة لدينا مع اختلافين:

في سطر التقييم نتحصل على الحل الأمثل إذا كانت قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة.

في عملية التحسين يتم اختيار أكبر قيمة موجبة.

بالنسبة للمتغيرات الاصطناعية فان معاملها(M+) في دالة الهدف.

مثال:

تلقت إحدى المؤسسات طلبية بـ 1000 كغ من خليط خاص متكون من ثلاث مواد كيماوية يرمز لها بـ ل1،ل2، ل3 وتقدر تكاليفها بالترتيب 5، 6، 7 دج لكل كغ.

تخضع هذه المواد للشروط التالية:

لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من المادة الأولى (ل1)

في نفس الوقت يجب استعمال 500 كغ على الأقل من المادة الثانية (ل2)

يجب استعمال 200 كغ على الأقل من المادة الثالثة (ل3)

المطلوب: تحديد الكميات الواجب استعمالها ن المواد الثلاثة لتلبية هذه الطلبية وذلك لتحقيق أقل تكلفة ممكنة.

الحل:

- **X1:** الكمية المستعملة من من المادة الأولى (ل1)
- **X2:** الكمية المستعملة من من المادة الأولى (ل2)
- **X3:** الكمية المستعملة من من المادة الأولى (ل3)

لدينا النموذج الرياضي:

$$MINC= 5X1+6X2+7X3$$

$$X1\leq 300$$

$$X2\geq 150$$

$$X3\geq 200$$

$$X1+X2+X3=1000$$

$$X1,X2, X3\geq 0$$

الحل:

التحويل إلى الشكل المعياري:

MINC= 5X1+6X2+7X3+0A1+0A2+MA3+0A4+MA5+MA6

X1+A1=300

X2-A2+A3=150

X3-A4+A5=200

X1+X2+X3+A6=1000

X1,X2,A1 ,A2,A3,A4,A5≥0

الجدول الأول:

			5	*6*	*7*	*0*	*0*	*M*	*0*	*M*	*M*	
			X1	**X2**	X3	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
0	A1	300	1	0	0	1	0	0	0	0	0	∝
M	**A3**	150	0	**1**	0	0	-1	1	0	0	0	**150**
M	A5	200	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	∝
M	A6	1000	1	1	1	0	0	0	0	0	1	**1000**
C=1350M			**M-5**	**2M-6**	**2M-7**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	

تتم عملية التحسين كما يلي:

			5	*6*	*7*	*0*	*0*	*M*	*0*	*M*	*M*	
			X1	X2	**X3**	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
0	A1	300	1	0	0	1	0	0	0	0	0	∝
6	X2	150	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	∝
M	**A5**	200	0	0	**1**	0	0	0	-1	1	0	**200**
M	A6	1000	1	1	1	0	0	0	0	0	1	**850**
C=900+1050M			**M-5**	**0**	**2M-7**	**0**	**-6+M**	**6-2M**	**-M**	**0**	**0**	

إن النتائج المتحصل عليها تتطلب عملية تحسين أخرى؛

			5	*6*	*7*	*0*	*0*	*M*	*0*	*M*	*M*	
			X1	X2	X3	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
0	**A1**	300	**1**	0	0	1	0	0	0	0	0	∝
6	X2	150	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	∝
7	X3	200	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	**200**

M	A6	650	1	1	1	0	0	-1	1	-1	1	**850**
C=2300+650M			**M-5**	**0**	**0**	**0**	**-6+M**	**6-2M**	**M-7**	**-2M+7**	**0**	

إن النتائج المتحصل عليها تتطلب عملية تحسين أخرى؛

			5	***6***	***7***	***0***	***0***	***M***	***0***	***M***	***M***	
			X1	X2	X3	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
0	X1	300	1	0	0	1	0	0	0	0	0	∝
6	X2	150	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	**-150**
7	X3	200	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	∝
M	**A6**	650	0	0	0	-1	**1**	-1	1	-1	1	**350**
C=3800+350M			**0**	**0**	**0**	**5-M**	**-6+M**	**6-2M**	**M-7**	**-2M+7**	**0**	

إن النتائج المتحصل عليها تتطلب عملية تحسين أخرى؛

			5	***6***	***7***	***0***	***0***	***M***	***0***	***M***	***M***	
			X1	X2	X3	A1	A2	A3	A4	A5	A6	
5	X1	300	1	0	0	1	0	0	0	0	0	∝
6	X2	150	0	1	0	-1	0	0	1	0	1	**-150**
7	X3	200	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	∝
0	A2	650	0	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	**350**
C=5900			**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**-M**	**-M**	**1-M**	**6-M**	

X1=300,X2=150,X3=200,MINC=5900DA

مشكلة الإزدواجية (الثنائية)(DUALITE)

كل مسألة لما نضع لها نموذجا رياضيا تسمى بالمسألة المطروحة(**PRIMAL**). وهو أول نموذج يستنتج من المشكلة الإقتصادية المطروحة أمامنا. إذا **افترضنا مسألة (MAX)** مع 10 قيود، أي أن جدول السمبلاكس توجد فيه 10 أسطر نظرا لتعدد القيود. يمكن حل هذه المسألة بما يسمى بالمسألة المعكوسة، كما تدعى أيضا بالثنائية أو البرنامج الرفيق أو الازدواجية أو النظير(**DUAL**). نظرا لإمكانية حل نفس المشكلة بطريقتين مطروحة ومعكوسة نقول بأن هناك ازدواجية أو ثنائية ويتم استنتاج المسألة المعكوسة من المسألة المطروحة. للإشارة، فان التسميات عديدة حسب المراجع فهي تدعى بمسألة الازدواجية أو ثنائية أوالمرافق أو المسألة المعكوسة. المسألة المعكوسة مثل المسألة المطروحة لها (دالة الهدف، قيود وشرط عدم السلبية).

مثال: المسألة المطروحة

$$MAX\ Z = 2X1+3X2+3X3$$

$$2X1+2X2+X3 \leq 20$$

$$3X1+2X2 \leq 10$$

$$X1+1/2X2+X3 \leq 30$$

$$1/2X1+X3 \leq 40$$

$$X1+X2+1/3X3 \leq 10$$

$$X1,X2,X2 \geq 0$$

يتم تحويل نموذج المسألة المطروحة إلى مسألة معكوسة كما يلي:

دالة الهدف: تصبح دالة الهدف عكس ما هي في المسألة المطروحة، أي إذا كانت MAX تصبح MIN وإذا كانت MIN في المسألة المطروحة تصبح MAX في المسألة المعكوسة.

نستنتج عوامل دالة الهدف للمسألة المعكوسة من الطرف الثاني للقيود في المسألة المطروحة:

$$MIN\ C= 20Y1+10Y2+30Y3+40Y4+10Y5$$

أي متغيرات دالة الهدف هي متغيرات أخرى غير المتغيرات الموجودة في المسألة المطروحة، أي هنا مثلا، ...X1,X2,X3 (مسألة مطروحة) نضع (....Y1,Y2,Y3) في المسألة المعكوسة.

استنتاج 1:

عدد القيود في المسألة المطروحة هي التي تعطينا عدد المتغيرات في المسألة المعكوسة.

القيود: هي عبارة أيضا على معاملات ومتغيرات مثل المسألة المطروحة واتجاه معين لمتراجحة وكمية متاحة في الطرف الثاني.

أي إذا كانت (أقل من) تصبح (أكبر من) في المسألة المعكوسة، ويتم استنتاج القيد الأول في المسألة المعكوسة من المتغير الأول (X1) في المسألة المطروحة...وهكذا، فتصبح القيود كما يلي:

$$2Y1+3Y2+1Y3+1/2Y4+Y5\geq 2$$

$$2Y1+2Y2+1/2Y2+Y5\geq 3$$

$$Y1+Y3+Y4+Y5\geq 3$$

أما كميات الطرف الثاني فتستنتج من معاملات دالة الهدف للمسألة المطروحة أي 2،3،3.

استنتاج 2:

عدد المتغيرات في المسألة المطروحة تحدد عدد القيود في المسألة المعكوسة.

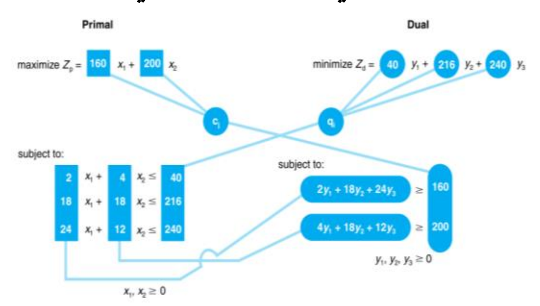
شرط عدم السلبية:

$$Y1,Y2,Y3,Y4,Y5\geq 0$$

إذا، نقوم بحل النموذج بالطرق المعروفة.

بعد الحل نلاحظ أن دالة الهدف في المسألتين لها نفس القيمة.

يمكن تلخيص المعلومات أعلاه في الشكل الموالي:



مثال:

$$MAX\ Z= X1+3X2$$

$$2X1+X2\leq 40$$

$$X1+4X2\leq 90$$

$$X1,X2\geq 0$$

الحل بطريقة المسألة المطروحة، بتشكيل النموذج المعياري نحصل على:

$$MAX\ Z= X1+3X2+0A1+0A2$$

$$2X1+X2+A1=40$$

$$X1+4X2+A2=90$$

$$X1,X2,A1,A2\geq 0$$

الجدول الأول يكون كما يلي:

			1	***3***	***0***	***0***
			X1	X2	A1	**A2**
0	A1	40	2	1	1	**0**
0	X2	90	1	4	0	**1**
		Z=0	**-1**	**-3**	**0**	**0**

بعد عملية التحسين الأولى نحصل على:

			1	***3***	***0***	***0***
			X1	X2	A1	**A2**

0	A1	35/2	7/4	0	1	**-1/4**
3	X2	45/2	¼	1	0	¼
		Z=135/2	**-1/4**	**0**	**0**	¾

بعد عملية التحسين الثانية نحصل على:

			1	***3***	***0***	***0***
			X1	X2	A1	**A2**
1	X1	10	1	0	4/7	**-1/7**
3	X2	20	0	1	-1/7	**2/7**
		Z=70	**0**	**0**	**1/7**	**5/7**

الحل الأمثل: Z=70 X1=10 X2=20

الحل بطريقة المسألة المعكوسة:

يصبح النموذج الرياضي كما يلي:

$$MIN\ C=40Y1+90Y2$$

$$2Y1+Y2\geq 1$$

$$Y1+4Y2\geq 3$$

$$Y1,Y2\geq 0$$

نحوله إلى الشكل المعياري:

$$MIN\ C=40Y1+90Y2+0A1+MA2+0A3+MA4$$

$$2Y1+Y2+A1+A2=1$$

$$Y1+4Y2-A3+A4=3$$

$$Y1,Y2,A1\ ,\ A2,A3\geq 0$$

إذا قمنا بحل هذه المسألة بطريقة السمبلاكس نحصل على:

			40	***90***	***0***	***M***	***0***	***M***
			Y1	Y2	A1	A2	A3	**A4**
M	A2	1	2	1	-1	1	0	**0**

M	A4	3	1	4	0	0	-1	1
		C=4M	**3M-40**	**5M-90**	**-M**	**0**	**-M**	**0**

بعد عملية التحسين الأولى نحصل على:

			40	*90*	*0*	*M*	*0*	*M*
			Y1	Y2	A1	A2	A3	**A4**
M	A2	1/4	7/4	0	-1	1	1/4	**-1/4**
90	Y2	3/4	¼	1	0	0	-1/4	¼
		C=1/4M+135/2	**3M-40**	**5M-90**	**-M**	**0**	**1/4M-90/4**	**-5/4M+90/4**

بعد عملية التحسين الثانية نحصل على:

			40	*90*	*0*	*M*	*0*	*M*
			Y1	Y2	A1	A2	A3	**A4**
40	Y1	1/7	1	0	-4/7	4/7	1/7	**-1/7**
90	Y2	5/7	0	1	1/7	-1/7	-2/7	**8/28**
		C=70	**0**	**0**	**-10**	**-M+10**	**-20**	**-20-M+20**

وهو الحل الأمثل: C=70 Y1=1/7 Y2=5/7

استنتاج: أسعار الظل تساوي كميات الحل في المسألة المطروحة وكميات الحل تساوي أسعار الظل في المسألة المعكوسة.

طريقة استنتاج الجدول النهائي للمسألة المعكوسة من حل المسألة المطروحة:

لاحظ كيف تنتقل القيم من جدول المسألة المطروحة إلى جدول المسألة المعكوسة.

			1	*3*	*0*	*0*
			X1	X2	A1	**A2**
1	X1	10	1	0	4/7	**-1/7**
3	X2	20	0	1	-1/7	**2/7**
		Z=70	**0**	**0**	**1/7**	**5/7**

نستبعد أعمدة المتغيرات الإصطناعية. أي من سطر التقييم في المسألة الأولى تستنتج عمود الكميات في المسألة الثانية، وذلك بأخذ القيم المختلفة عن الصفر.

جميع القيم التي تؤِخذ من الجدول نعكس إشارتها في الجدول الثاني إلا سطر التقييم.

في الجدول النهائي الأول تم تغيير المتغيرات كما يلي:

A1 ← Y1

A2←Y2

B1←X1

B3←X2

X1,X2 دخلا الحل إذا في سطر التقييم نجده =0، نقطة التقاء سطر وعمود X1 يساوي 1، نقطة التقاء سطر وعمود X2 يساوي 1، باقي القيم0.

نقطة التقاء X1 سطر و A1 عمود في الجدول الجديد نذهب بها إلى الجدول المعطى أي A1 سطر وعمود X1 فنجد القيمة -7/4 ثم نكتبها في الجدول الجديد مع قلب الإشارة، وهكذا لكل القيم.

			40	***90***	***0***	***0***
			Y1	Y2	A1	**A3**
40	Y1	1/7	1	0	-4/7	**1/7**
90	Y2	5/7	0	1	1/7	**-2/7**
		C=70	**0**	**0**	**-10**	**-20**

مثال(2):

المسألة المطروحة:

$$\max z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

المسألة المعكوسة:

$$Minc = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2$$
$$4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 4$$
$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

حل المسألة المطروحة:

			X_1	X_2	X_3	A_1	A_2	A_3
4	X_2	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
3	X_3	$\frac{50}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0
0	A_3	$\frac{80}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
$Z=\frac{230}{3}$			$\frac{11}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	0

إستنتاج حل المسألة المعكوسة:

			60	40	0	0	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	A_1	A_2	A_3
60	Y_1	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
40	Y_2	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	A_1	$\frac{11}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$

$C=\frac{230}{3}$	0	0	$-\frac{80}{3}$	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{50}{3}$

نلاحظ أن :

- المتغيرات X3,X2,X1 في المسألة المطروحة تصبح A1, A2,A3.
- المتغيرات A1, A2,A3 في المسألة المطروحة تصبح Y1, Y2,Y3 في المسألة المعكوسة.
- السطر في المسألة المطروحة يصبح عمودا في المسألة المعكوسة والعكس صحيح.
- إشارة (+) في المسألة المطروحة تصبح (-) في المسألة المعكوسة.
- Z يصبح C وبنفس الإشارة.

الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

الحالة1: المسألة التي ليس لها حل: نجد في الطريقة البيانية أن قيد يلغي حلول قيد أخر فمعناه أن المسألة ليس لها حل. أما في جدول السمبلاكس في الجدول الأخير، أي جدول الحل المثل نجد متغيرات اصطناعية في الحل، أي بظهور المتغير الإصطناعي أي ليس للمسألة معنى اقتصادي ومنه المسألة ليس لها حل،

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

يتم تحويل النموذج إلى نموذج معياري:

MAX Z=2 X1+5X2+0A1+0A2-MA3

X1+X2+A1=10

2X1+3X2-A2+A3=48

X1,X2,A1,A2,A3≥0

الجدول الأول يكون كما يلي:

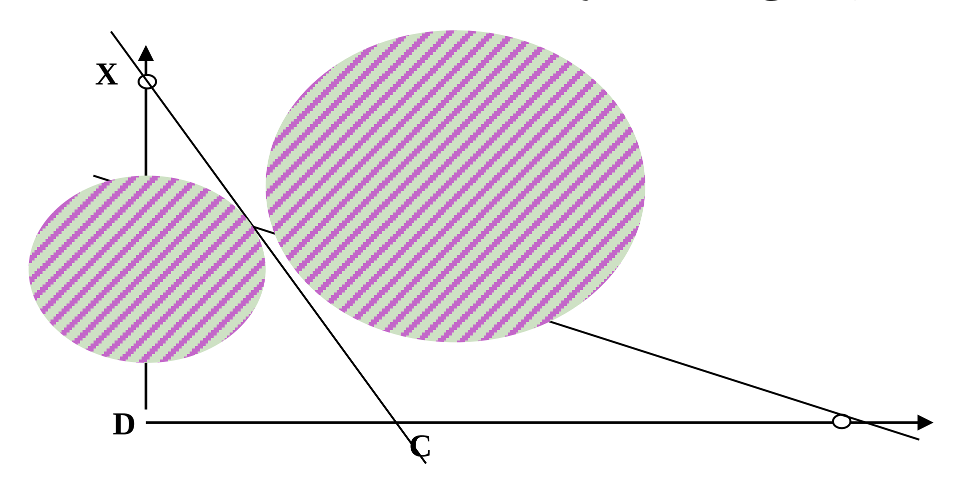
			2	5	0	0	-M
			X1	X2	A1	A2	A3
0	A1	10	1	1	1	0	0
-M	A3	48	2	3	0	1-	1
Z = -48M			-2M-2	-3M-5	0	M	0

بعد عملية التحسين الأولى نحصل على:

			1	3	0	0	-M
			X1	X2	A1	A2	A3
5	X2	10	1	1	1	0	0
-M	A3	18	-1	0	-3	-1	1
Z = 50-18M			3+M	0	5+3M	M	0

كل قيم سطر التقييم موجبة أو سالبة وهذا يعني أن هذا الحل أمثل.

وللتحقق نستعمل الطريقة البيانية :



ملاحظة: إذا وجدنا أن المسألة المطروحة ليس لها حل فإن المسألة المعكوسة ليس لها حل.

الحالة 2: حالة عدم الإنتظام :

أثناء عمليات التحسين، وأثناء اختيار المتغيرة الداخلة قد نجد قيمتين متساويتين في سطر التقييم فيتم الاختيار عشوائيا. لكن أثناء الاختيار بين قيمتين متساويتين لاختيار المتغيرة الخارجة فان الأمر ليس بتلك البساطة، حيث نجد إحدى القيمتين قد تؤدي إلى الحل الأمثل بسهولة أكثر من الأخرى أو كلاهما وفي بعض الحالات قد لا تؤدي أي منهما إلى الحل وهذه حالة عدم الانتظام. وهذا يبين مشكلا في تكوين النموذج الرياضي في حد ذاته.

<u>مثال:</u>

تدرس الخطوط الجوية الجزائرية إمكانية إقتناء طائرات جديدة لتوسيع نطاق خدماتها، وخصصت لذلك الغرض مبلغ 480 مليون دج .

وبعد دراسة العروض المقدمة من قبل مصانع الطائرات وجدت أن هناك ثلاث أنواع من الطائرات يمكن الإختيار بينها:

ثمن الطائرة من النوع الأول: 8 ملايين دج

ثمن الطائرة من النوع الثاني: 6 ملايين دج

ثمن الطائرة من النوع الثالث: 12 مليون دج

يقدر الربح الصافي اليومي من كل طائرة بـ 8 آلاف، 7 آلاف و 9 آلاف دج على التوالي.

يوجد لدى المؤسسة 600 شخصا يشتغلون كملاحين، ولاحظت المؤسسة أن كل طائرة من النوع الأول يحتاج إلى 5 ملاحين، بينما تحتاج كل طائرة من النوع الثاني إلى 5 ملاحين والنوع الثالث لـ 4 ملاحين.

بالنسبة للفنيين، يوجد 240 عاملا، حيث تحتاج كل طائرة من النوع الأول لـ 04 عمال لصيانتها ويحتاج النوع الثاني لـ 03 عمال ، بينما يحتاج النوع الثالث من الطائرة لـ 06 عمال لصيانتها.

المطلوب:

تحديد عدد ونوع الطائرات الواجب شراؤها بحيث يكون الربح في حده الأقصى.

الحل:

تكوين النموذج الرياضي:

X_1 : عدد الطائرات المشتراة من النوع الأول

X_2 : عدد الطائرات المشتراة من النوع الثاني

X_3: عدد الطائرات المشتراة من النوع الثالث

$$MAX\ Z = 8000x_1+7000x_2+9000x_3$$

$$8x1 + 6x2 + 12x3 \leq 480$$

$$5x1 + 5x2 + 4x3 \leq 600$$

$$4x1 + 3x1 + 6x3 \leq 240$$

$$x1, x2, x3 \geq 0$$

			8	7	9	0	0	0	
			X1	X2	X3	A1	A2	A3	
0	A1	600	5	6	6	1	0	0	100
0	A2	240	4	3	6	0	1	0	40
0	A3	480	8	6	12	0	0	1	40
Z = 0			-8	-7	-9	0	0	0	

في هذه الحالة يكون لدينا قيمتين متساويتين لتحديد المتغيرة الخارجة، يتم اختيار عشوائي لإحدى المتغيرات وستكون إحدى المتغيرات تعطينا الحل أسرع وأسهل من المتغيرة الأخرى، وهذا يعني أن هناك مشكل في تكوين القيود للمسألة.(في مثالنا هذا اخترنا A2 كمتغيرة خارجة ويمكن إتمام الحل بها.)

			8	7	9	0	0	0	
			X1	X2	X3	A1	A2	A3	
0	A1	360	1	3	0	1	0	0	120
9	X3	40	2/3	½	1	0	1	0	80
0	A3	0	0	0	0	0	0	1	0/0
Z =360			-2	-5/2	0	0	9/6	0	

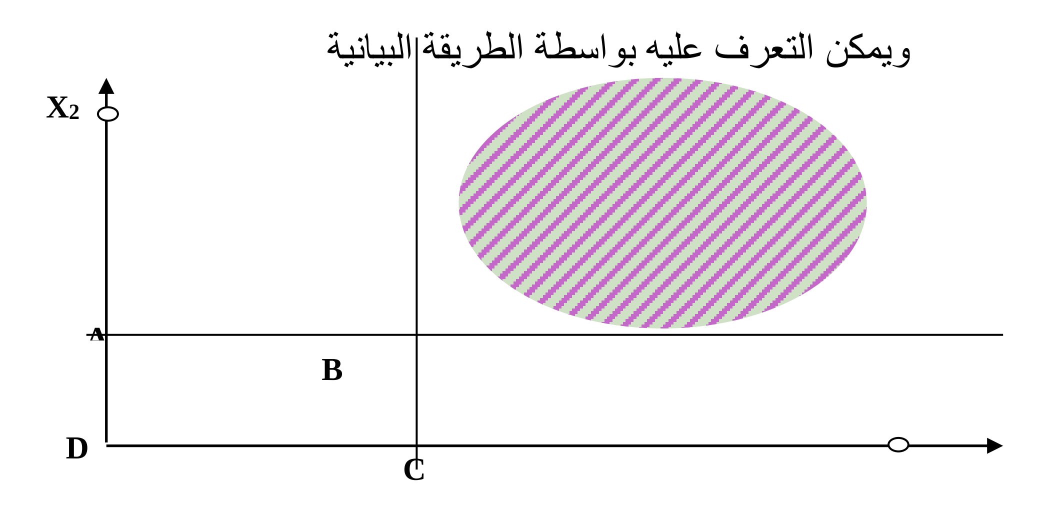
الحالة 3: حالة وجود قيمتين متساويتين في سطر التقييم أثناء عملية التحسين،

يتم الإختيار عشوائيا وهي عادة لا تطرح أي مشكلة.

الحالة 4: حالة الحل غير المحدود (لا نهائي)

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$
$$x_1 \geq 10$$
$$x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ويمكن التعرف عليه بواسطة الطريقة البيانية



أي المنتوج الأول $\leq$ 10 وحدات

المنتوج الثاني $\leq$ 12 وحدات

أي الحل هو كامل الجزء المضلل، معناه أن X1 غير محدود وأن دالة الهدف أيضا لا نهائية، ومنه نجد العديد من الحلول وبزيادة قيمة المتغيرات تزيد قيمة دالة الهدف. إذا قمنا بحل هذه المسألة بطريقة السمبلاكس نحصل على:

			6	4	0	M-	0	-
			X1	X2	A1	A2	A3	4
M-	A2	1	1	0	-1	1	0	
M-	A4	3	0	1	0	0	-1	
Z= -22M			-M-6	-M-4	M	0	M	

بعد عملية التحسين الأولى نحصل على:

			6	4	0	M-	0	M-
			X1	X2	A1	A2	A3	A4
6	X1	10	1	0	-1	1	0	0
M-	A4	3	0	1	0	0	-1	1

Z=60 -12M	0	-M-4	-6	6-M	M	0

بعد عملية التحسين الثانية نحصل على:

			6	4	0	M-	0	M-	
			X1	X2	A1	A2	A3	A4	
6	X1	10	1	0	-1	1	0	0	-10
4	X2	12	0	1	0	0	-1	1	12/0
Z= 108			0	0	-6	6+M	-4	4-M	

وهو ليس الحل الأمثل. أثناء عملية التحسين، عادة يتم تحديد المتغيرة الخارجة من حاصل قسمة عمود الكميات على عمود المتغيرة الداخلة، فإذا كانت كلها قيم سالبة أو مساوية إلى مالا نهاية فهذا يعني حل غير محدد. لاحظ في المثال أعلاه أن جميع قيم عمود المتغيرة الداخلة سالبة أو معدومة أو بشكل آخر القيم الناتجة عن القسمة سالبة أو ما لا نهاية.

الحالة 5: حالة الحل البديل:

هو الحل الذي له نفس مزايا الحل الأمثل، أي سواء تنتج المؤسسة بالتوليفة الأولى أو الثانية فلها نفس القيمة في دالة الهدف. ونعرفها في طريقة السمبلاكس: ذلك من آخر جدول في السمبلاكس (جدول الحل الأمثل) نجد قيمة إحدى المتغيرات التي لم تدخل في الحل (في سطر التقييم) مساوية للصفر . أي مثلا A1 قيمته في سطر التقييم صفر (0) ولم يدخل في الحل.

كيف يتم الحصول على الحل البديل؟

يتم الحصول على الحل البديل باعتبار هذه المتغيرة (التي لها قيمة مساوية لصفر في سطر التقييم ولم تدخل الحل) كمتغيرة داخلة. ويتم إعادة جدول آخر، ونجد الربح يساوي نفسه، أي ننتج منتوج واحد ونحصل على نفس الربح مع بقاء المادة الأولية

ملاحظة: بعدد الأصفار الموجودة في سطر التقييم (المتغيرة التي لم تدخل للحل) نجد عدد الحلول البديلة وذلك بالرجوع إلى الحل الأمثل.

مثال:

$$\max z = 10x + 15y$$
$$10x + 15y \leq 12000$$
$$5x + 15y \leq 9000$$
$$x, y \geq 0$$

			10	15	0	0	
			X1	X2	A1	A2	
10	X1	600	1	0	1/5	-1/5	-3000
15	X2	400	0	1	-1/5	2/15	3000
C=12000			0	0	1	0	

			10	15	0	0
			X1	X2	A1	A2
10	X1	120	1	0	1/5	0
0	A2	3000	0	1	-1/5	1
C=12000			0	0	1	0

ما هي الحالات الخاصة في المسائل التالية:

الحالة الأولى:

$$\max Z = 2x + 4y$$
$$x \leq 8$$
$$y \leq 3$$
$$3x + 6y \leq 30$$
$$x, y \geq 0$$

الحالة الثانية:

$$\max z = 5x + 8y$$
$$4x + 6y \leq 24$$
$$2x + y \leq 18$$
$$3x + 9y \leq 36$$
$$x, y \geq 0$$

الحالة الثالثة:

$$\max z = 2x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 80$$
$$x_1 - x_2 \geq 30$$
$$4x_1 - x_2 \geq 160$$
$$x_1, x \geq 0$$

تحليل الحساسية(analyse de sensibilite)

بعد تكوين النموذج الرياضي للمسألة محل الدراسة وحلها بإحدى الطرق المذكورة، قد تطرأ بعض التغيرات على أرقام النموذج الأصلي؛

1. الموارد المتاحة تتغير في المدى القصير.
2. معاملات دالة الهدف تتغير في المدى المتوسط.
3. المعاملات التقنية تتغير في المدى الطويل.

فإعادة الحل مرة أخرى سيكون عملا إضافيا لمتخذ القرار، أي ما تحصل عليه سابقا لن يكون مجديا. لذا نتساءل عن إمكانية استخدام ما لدينا من الحل السابق، معناه كيف سيتغير القرار إذا تغير عنصر من هذه النقاط الثلاثة، وهذا ما ندعوه بتحليل الحساسية ويدعى أيضا بتحليل ما بعد الأمثلية.

1- المدى القصير: تغير الموارد المتاحة

مثال1 : لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} &MAX\ Z=2X1+4X2+3X3 \\ &3X1+4X2+2X3\leq 60 \\ &2X1+X2+2X3\leq 40 \\ &X1+3X2+2X3\leq 80 \\ &X1,X2,X3\geq 0 \end{aligned}$$

كيف سيتأثر الحل إذا تغيرت كمية المورد الأول وأصبحت مثلا 70 وحدة؟

كيف سيتأثر الحل إذا أصبحت الكمية المتاحة من المورد الثاني 30 وحدة؟

كيف سيتأثر الحل إذا أصبحت الكمية المتاحة من المورد الثالث 90 وحدة؟

أولا نقوم بحل النموذج المطروح؛

			2	4	3	0	0	0
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
4	X2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	X3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	A3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
		Z=230/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0

Z=230/3,X3=50/3, X2=20/3, X1=0

A3= 80/3 الكمية غير المستغلة من المورد الثالث.

3/2 و 6/5 تعتبر أسعار ظل؛ 6/11 هي تكلفة التضحية.

❖ ان6/5 هو الربح الإضافي الناتج عن إضافة وحدة واحدة من المورد الأول، فاذا مأصبح النموذج الجديد:

MAX Z=2X1+4X2+3X3

3X1+4X2+2X3≤70

2X1+X2+2X3≤40

X1+3X2+2X3≤80

X1,X2,X3≥0

6/5 * 10 = الربح المضاف الناتج عن زيادة بـ 10 وحدات من المورد الأول.

ويصبح الربح الجديد = الربح القديم + الربح الإضافي

3/230 + 6/5 * 10 = 6/510 دج = 85 دج

فيما يخص المنتوج X2؛ كلما أضفنا وحدة واحدة من المورد الأول فان X2 يزيد بـ3/1 وحدة.

في حالتنا عند إضافة 10 وحدات نجد أن:

X2= 3/20+3/1 * 10 = 10 وحدات

كلما أضفنا وحدة واحدة من المورد الأول، فان X3 ينخفض بـ 6/1 وحدة، إذا، في حالتنا عند إضافة 10 وحدات نجد:

X3=50/3 – 1/6*10=45/3=15 وحدة

كلما أضفنا وحدة واحدة من المورد الأول تزيد الكمية المتبقاة منA3 بـ3/2 وحدة، في حالتنا، بإضافة 10 وحدات من المورد الأول تصبح الكمية المتبقية الجديدة الكمية السابقة + الكمية الإضافية:

80/3+20/3= 100/3 وحدة

من هذه الملاحظات يمكننا استنتاج الحل الجديد بعد التغير في المورد الأول بـ10 وحدات دون اللجوء إلى إعادة الحل؛

			2	**4**	**3**	**0**	**0**	**0**
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
4	X2	**10**	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	X3	**15**	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	A3	**100/3**	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
	Z = 85		11/6	0	0	5/6	2/3	0

علما أن المصفوفة وسطر التقييم يبقيان كما هما.

نفس العمل يمكن القيام به في حالة تغير الكمية المتاحة من المورد الثاني 30 وحدة، أو الكمية المتاحة من المورد الثالث إلى 90 وحدة؟

ما الذي يحدث للقرار إذا انخفضت قيمة المورد الأول بـ 40 وحدة؟

$$MAX\ Z = 2x1+4x2+3x3$$

$$3x1+4x2+2x3 \leq 20$$

$$2x1+x2+2x3 \leq 40$$

$$x1+3x1+2x3 \leq 80$$

$$x1,x2,x3 \geq 0$$

1 - الربح الجديد: $\frac{230}{3}+\frac{5}{6}(-40)=\frac{260}{6}$

2 - توليفة الإنتاج:

$$x2=\frac{20}{3}+\frac{1}{3}(-40)=-\frac{20}{3}$$

$$x3=\frac{50}{3}+\left(-\frac{1}{6}\right)(-40)=\frac{70}{3}$$

$$A3=\frac{80}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)(-40)=0$$

$x2=-\frac{20}{3}$ شيء ينافي شرط عدم السلبية وتم إستغلال تام للمورد الثالث A3. أي أن الحل الجديد هو:

			2	4	3	0	0	0
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
4	X2	-20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	X3	70/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	A3	0	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
		Z = 260/6	11/6	0	0	5/6	2/3	0

يجب تصحيح هذا الجدول من جانب القيمة السلبية $x2=-\frac{20}{3}$

للتخلص من القيمة السالبة، نبحث في سطر x2 على قيمة سالبة ونأخذها وكأنها محور ثم نعيد تكوين جدول جديد، نحصل على:

			2	4	3	0	0	0
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
0	A2	20	-1	-3	0	-1	1	0
3	X3	10	3/2	2	1	-1/2	0	0
0	A3	20/3	4/3	-1	0	1/3	0	1
	Z = 30		5/2	2	0	-3/2	0	0

لاحظ أن المتغيرات قد تغيرت كما أننا سنقوم بتحسين لوجود قيمة سالبة في سطر التقييم. أي أن الحل الذي انطلقنا منه قد تغير تماما. نستنتج أن بعض الكميات تؤثر على الحل فيما يخص التوليفة نفسها وكميات لا تؤثر على الحل. أي أن هناك مجالا تتأثر فيه التوليفة وهناك

مجالا آخر لا تتأثر فيه التوليفة؟ إن الهدف من تحليل الحساسية هو تحديد هذا المجال الذي لا يتغير فيه الحل.

وهكذا يبحث تحليل الحساسية في مجال الإمكانية لمختلف الموارد بالنسبة للمدى القصير.

1- بالنسبة للمورد الأول :

ما هي الكميات من هذا المورد التي لم تؤثر ولن تغير التوليفة المنتجة وعلى أسعار الظل؛

$$1..........\left\{\frac{20}{3}+\frac{1}{3}\Delta\geq 0\right.$$

$$2...........\left\{\frac{50}{3}-\frac{1}{6}\Delta\geq 0\right.$$

$$3...........\frac{80}{3}+\frac{2}{3}\Delta\geq 0$$

يجب أن تتوفر كل هذه الشروط مجتمعة؛ مما يعني حل مجموعة المتراجحات؛

$$\frac{1}{3}\Delta\geq-\frac{20}{3}\Rightarrow\Delta\geq-20$$

$$-\frac{1}{6}\Delta\geq-\frac{50}{3}\Rightarrow\frac{1}{6}\Delta\leq\frac{100}{6}\Rightarrow\Delta\leq 100$$

$$\frac{2}{3}\Delta\geq-\frac{80}{3}\Rightarrow\Delta\geq-40$$

$$\Delta\in[-20,100]$$

Δ معناه المقدار الذي نزيده أو نخفضه من المورد الأول ويبقى الحل(الجدول) كما هو.

ومنه يمكن إستخلاص كميات المورد الأول في مجال الإمكانية هي:

$$A1\in[-20+60,100+60]$$

$$A1\in[40,160]$$

مثلا: إذا كان $3x1+4x2+2x3\leq 120$

الجدول لا يتغير من ناحية المصفوفة لكن العمود الثالث الخاص بالكميات والربح يتغيران.

			1	2	3	1	2	A3
	2	0/3	/3			/3	1/3	
	3	0/3	/6			1/6	/3	
	3	60/3	/3			/3	1/3	
Z = 230/3			1/6			/6	/3	

-2 **بالنسبة للمورد الثاني** : نعمل بأسعار الظل لـ A_2

$$20/3+(-1/3)\,\Delta\geq 0\Rightarrow -\Delta\geq -20\Rightarrow \Delta\leq 20$$

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 2/3\Delta\geq -50/3\Rightarrow \Delta\geq -25\quad 50/3+2/3$$

$$80/3+(-1/3)\Delta\geq 0\Rightarrow -1/3\Delta\geq -80/3\Rightarrow \Delta\leq 80$$

مقدار التغير في A_2 $\Delta\in[-25.20]$

في هذا المجال تبقي أسعار الظل السابقة سارية المفعول، وخارج هذا المجال يتغير الحل كله.

مجال الإمكانية لكميات المورد الثاني هو:

$$A2\in[40-25.40+20]$$

$$[15.60]$$

الحل الجديد في حالة انخفاض المورد الثاني بـ10وحدات هو:

$$20/3+10/3=30/3$$

$$50/3+(-20/3)=30/3$$

$$80/3+(10/3)=90/3$$

3 - بالنسبة للمورد الثالث:

نلاحظ أن A3 موجودة في الحل أي هناك كمية متبقية من المورد الثالث A3=80/3 .

بما أن هذا المورد لم يستغل كليا يجب أن نستغل في البداية 80/3 من المورد الثالث ثم نفكر في الإضافة (فلا يمكن التحدث عن زيادة كميات من هذا المورد وإنما نتحدث عن التخفيض فقط).

تحديد مجال الإمكانية للمورد الثالث .

القيد الأول محقق $\frac{20}{3}+0(\Delta)\geq 0$

القيد الثاني محقق $\frac{50}{3}+0(\Delta)\geq 0$

مقدار التغير $\frac{80}{3}+1(\Delta)\geq 0\Rightarrow -\frac{80}{3}$

وهو مجال الإمكانية

الكميات :

الكمية $\geq 80-\frac{80}{3}$

الكمية $\geq\frac{160}{3}$

إذا كان المورد الثالث قد تغير بزيادة 10 وحدات حيث أصبح:

$$x1+3x2+2x3\leq 90$$

ليس لها معنى هذه الزيادة بـ 10وحدات لأنه لدينا فائض يقدر ب 3/80وحدة.

لكن لو انخفض المورد الثالث بـ 40 وحدة ؟ ما الذي يحدث؟

ثانيا: المدى المتوسط: تغير معاملات دالة الهدف:

لدينا: $MAXZ=2x1+4x2+3x3$

إذا ما تفحصنا جدول الحل الخاص بالمسألة نلاحظ المتغيرات التي دخلت الحل والمتغيرات التي لم تدخل الحل. فلندرس كل حالة على حدى.

الحالة الأولى: المتغيرات التي دخلت الحل:

:x2 كل وحدة من المنتوج الثاني تحقق 4 دج كربح. لو أصبح x2 ربحها 5 دج. إذن يصبح الجدول:

			2	**5**	3	0	0	0
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
5	X2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	X3	50/3	5/6	0	1	1/6	2/3	0
0	A3	80/3	3/5	0	0	2/3	-1/3	1
Z = 250/3			13/6	0	0	1/6	1/3	0

سعر الظل الجديد لـ A1 هو:

6/1 = 5*1/3+(-1/6*3)+0*(-1/3)-2

وبالنسبة لتكلفة التضحية للمنتوج الأول:

6/13 = 5x1/3+5/6.3+0x5/3-2

نتيجة: إذا تغير معامل المنتوجات في دالة الهدف، يتغير السطر الأخير في الجدول Z وسطر التقييم.

$$Z=\left(\frac{20}{3}\right)1+\frac{230}{3}=\frac{250}{3}$$

ما هي العناصر التي تتأثر بهذا التغيير؟

$$5.\frac{1}{3}+\left[\frac{5}{6}.3+0.\frac{5}{3}-2\right]$$

$$=1\left(\frac{1}{3}\right)+\left[4.\frac{1}{3}+\frac{5}{6}.3+0.\frac{5}{3}-2\right]$$

علما أن:

$$\left[4.\frac{1}{3}+\frac{5}{6}.3+0.\frac{5}{3}-2=\frac{11}{6}\right]$$

فهذا يعني تكلفة التضحية القديمة مضافا إليها مقدار معين. بشكل عام يمكن استنتاج ما يلي:

$$\Delta\left(\frac{1}{3}\right)+\left[4.\frac{1}{3}+\frac{5}{6}.3+0.\frac{5}{3}-2\right]\Rightarrow\Delta\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{6}$$

كلما يتغير معامل المنتوج الثاني في دالة الهدف، فان:

تكلفة التضحية الجديدة = تكلفة التضحية القديمة + $\Delta\left(\frac{1}{3}\right)$

ونفس الطريقة لأسعار الظل الأخرى A1,A2 أي المتغيرات التي لها أسعار ظل فقط.

Zالجديد = Z القديم + $\left(\frac{20}{3}\right)\Delta$

مجال الأمثلية: داخله نطبق هذه التغييرات ويبقى الحل كما هو.هناك قيم خارج هذا المجال يجب إعادة الحل.

سؤال : نفترض أن الربح لـ x2 هو 8 دج بدلا من 4 دج نعيد ما قمنا به سابقا من خطوات:

$$4\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{6}=\frac{19}{6}$$

$$4\left(+\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$$

$$4\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

في هذه الحالة نرى أن 3/2- سالبة أي خرجنا من الحل القديم أي أن هناك حلولا جديدة. وبالتالي خرجنا من الحل الأمثل السابق. مما يستدعي إجراء تحسينات.

لتكون Δ مقبولة يجب أن تتوفر على شروط معينة :

$$\Delta\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{6}\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -\frac{11}{2}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{6}\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -\frac{5}{2}$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\geq 0\Rightarrow \Delta\leq 2$$

$$-2,5\leq \Delta\leq 2$$

$$\Delta\in\left[-2,5,2\right]$$

$$c2\in\left[-2,5+4,2+4\right]$$

$$c2\in\left[1.5,6\right]$$

تحديد مجال الأمثلة للمنتوج : x3

$$\Delta\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{11}{6}\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -\frac{11}{5}$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}\geq 0\Rightarrow \Delta\leq 5$$

$$\Delta\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\geq 0\Rightarrow \Delta\geq -1$$

$$\Delta\in\left[-1,5\right]$$

$$c3\in\left[2,8\right]$$

لو أن معامل المنتوج الثالث يتغير في المجال[2,8] لا داعي لتغيير الحل فالحل يبقى دائما أمثل.

الحالةالثانية: المنتوجات التي لم تدخل الحل :

لا يتغير أي شيئ إلا في العمود الخاص بالمنتوج الذي لم يدخل الحل.

X1لم تدخل للحل لأن ربحها غير كافي بـ 6/11دج ليدخل X1إلى الحل يجب على الأقل أن يكون ربحه = 6/11+2 وهي مساوية لتكلفة الفرصة الضائعة +الربح القديم وهو 3,83 = 6/23 أي يجب أن يكون الربح الأدنى 3,83دج لكي يدخل الحل.

سؤال :ما هو حل هذه المسالة إذا كان الربح الخاص بـ x1 هو 4 دج.

			2+Δ	4	3	0	0	0
			X1	X2	X3	A1	A2	A3
4	X2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	X3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	A3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
		Z = 230/3	3/2	0	0	5/6	2/3	0

$$4.\frac{1}{3}+3.\frac{5}{6}+0\frac{5}{3}-2-\Delta\geq 0$$

المنتوج الذي لم يدخل الحل هو $\frac{11}{6}-\Delta\geq 0$

$$c1\leq\frac{11}{6}+2 \qquad \Delta\leq\frac{11}{6}$$

$$c1\leq 23/6=3,83$$

<u>مثال(2):</u>

ينتج مصنع للأثاث 4 أنواع من المكاتب م1، م2، م3 و م4 . كل نوع يمر أولا على ورشة النجارة، ثانيا ورشة التمليس والزخرفة. الزمن المتاح في الورشة الأولى يقدر بـ 6000 ساعة وفي الورشة الثانية بـ

4000 ساعة. يقدر الربح في النوع الأول بـ 12 دج والنوع الثاني 20 دج النوع الثالث 18 دج والنوع الرابع 40 دج

يوضح الجدول التالي الزمن بالساعات الذي يحتاجه كل نوع في كل ورشة:

	م1	م2	م3	م4
ورشة 1	4	9	7	10
ورشة 2	1	1	3	40

المطلوب:

- ما هو الإنتاج الأمثل من هذه الأنواع الأربعة لتحقيق أعظم ربح:
- ما هو البرنامج النظير للبرنامج الأصلي
- استعمل المعلومات من الجدول النهائي للبرنامج الأصلي لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج النظير
- ما هو التأثير على البرنامج الأمثل الأصلي لو تغير الربح الصافي للمكتب الأول بـ 4 دج
- نفس السؤال لو تتغير الطاقة المتاحة للورشة الثانية وترتفع إلى 5000 وحدة
- بكم يستلزم تغيير الربح الصافي للمتغيرات التي لم تدخل إلى الحل حتى تصبح ضمن الحل الأمثل.
- هل هناك حل بديل؟

حل المثال2:

أولا: تحديد المشكلة بصورة وصفية: تهتم هذه المشكلة بتخطيط الإنتاج من أجل الحصول على أعظم ربح ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار ساعات العمل المتاحة في الورشتين، وهما 6000 ساعة في الورشة الأولى و 4000ساعة في الورشة الثانية

ثانيا: صياغة المشكلة بشكل رياضي:

لنفرض أن :

X_1: تشير إلى عدد المكاتب الواجب إنتاجها من النوع (م1)

X_2: تشير إلى عدد المكاتب الواجب إنتاجها من النوع (م2)

X_3 : تشير إلى عدد المكاتب الواجب إنتاجها من النوع (م3)

X_4 : تشير إلى عدد المكاتب الواجب إنتاجها من النوع (م4)

وتكون دالة الهدف كما يأتي:

$$\text{Max } z = 12x_1+20x_2+18x_3+40x_4$$

أما الشروط الخطية فلدينا نوع واحد فقط ، وهي شروط الإنتاج، وهذه الأخيرة تتعلق بساعات العمل المتاحة في كل ورشة، بحيث:

النوع الأول من المكاتب (x_1) يحتاج إلى (4 سا) في الورشة الأولى، بينما يحتاج النوع الثاني من المكاتب (X_2) إلى (9سا) ويحتاج النوع الثالث من المكاتب (X_3) إلى (7سا) ويحتاج النوع الرابع من المكاتب (X_4) إلى (10سا). فإن مجموع ما يلزم من ساعات العمل في الورشة الأولى يجب أن لا يتعدى الوقت المتاح في هذه الورشة (أي 6000سا) ، وبالتالي فإن القيد الأول يكتب:

$$4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leq 6000$$

بنفس الطريقة نتحصل على القيد الثاني والخاص بالورشة الثانية:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \leq 4000$$

بالإضافة إلى شرط عدم السلبية، إذ أنه لا يمكن أن يكون عدد المكاتب الواجب إنتاجها سالبا، أي

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

الجدول النهائي للحل الأمثل:

بعد القيام بالحل بالطريقة المعتادة، نتحصل على الجدول النهائي لهذه المسألة كما يأتي:

C	V	Q	12	20	18	40	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	A_1	A_2
12	X_1	$\frac{4000}{3}$	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
40	X_4	$\frac{200}{3}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$
$Z=\frac{56000}{3}$			0	$\frac{20}{1}$	$\frac{10}{30}$	0	$\frac{44}{15}$	$\frac{20}{75}$

البرنامج النظير للبرنامج الأصلي:

$$\text{Min } C = 6000Y_1 + 4000Y_2$$
$$4Y_1 + Y_2 \geq 12$$
$$9Y_1 + Y_2 \geq 20$$
$$7Y_1 + 3Y_2 \geq 18$$
$$10Y_1 + 40Y_2 \geq 40$$
$$Y1, Y2 \geq 0$$

استنتاج حل المسألة المعكوسة انطلاقا من جدول (حل) المسألة المطروحة:

C	V	Q	600	4000	0	0	0	0
			Y_1	Y_2	A_1	A_2	A_3	A_4
12	A_2	$\frac{20}{3}$	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{1}{30}$
40	A_3	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	1	$-\frac{1}{30}$
12	Y_1	$\frac{44}{15}$	1	0	$-\frac{4}{18}$	0	0	$\frac{1}{150}$
40	Y_2	$\frac{20}{75}$	0	1	$\frac{1}{18}$	0	0	$-\frac{2}{75}$
$C=\frac{56000}{3}$			0	0	$-\frac{4000}{3}$	0	0	$-\frac{200}{3}$

وتكون توليفة الحل كما يأتي:

$Y_1=\frac{44}{15}$

$Y_2=\frac{20}{75}$

$A_2=\frac{20}{3}$

$A_3=\frac{10}{3}$

2- تحديد مجال الأمثلية بالنسبة للمنتجات x_1, x_2, x_3, x_4

حالة المنتجات التي دخلت الحل:

بالنسبةللمنتوج X_1:

$$\frac{20}{3}+\Delta\left(\frac{7}{3}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\geq -\frac{20}{7}$$

$$\frac{10}{3}+\Delta\left(\frac{5}{3}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\geq -2$$

$$\frac{44}{15}+\Delta\left(\frac{4}{15}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\geq -11$$

$$\frac{20}{75}+\Delta\left(-\frac{1}{15}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\leq 4$$

$$\rightarrow \Delta E[-2,4\ ]\Rightarrow C_1 E[12-2,12+4\ ]\Rightarrow C_1 E[10,16+\ ]$$

هذا يعني أنه إذا انخفض ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الأول إلى حد 10 دج ، أو زاد إلى حد 16 دج، فإن الحل لن يتغير (أسعار الظل تتغير). أما في حالة انخفاض ربح X_1 بـ 4 دج فإن الحل يتغير ويقيد حساب جدول جديد.

بالنسبة لـ X_4

$$\frac{20}{3}+\Delta\left(-\frac{1}{30}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\leq 200$$

$$\frac{10}{3}+\Delta\left(\frac{1}{30}\right)\geq 0\rightarrow \Delta\geq -100$$

$$\frac{44}{15}-\frac{1}{50}(\Delta)\geq 0\rightarrow \Delta\leq 440$$

$$\frac{4}{15}+\frac{2}{75}(\Delta)\geq 0\rightarrow \Delta\geq -10$$

$$\rightarrow \Delta E[-10,200\ ]\Rightarrow$$

$$C_4 E[30-240\ ]$$

أسعار الظل والربح يتغيران أما توليفة الإنتاج (X_2,X_1) مصفوفة المعاملات التقنية لن يتغيرا.

حالة المنتجات التي لم تدخل الحل:

X_2: لم يدخل الحل لأن ربحه غير كافي بـ $\frac{20}{3}$، وهذا يعني أن أقل ربح يجب أن يحققه هو $20+\frac{20}{3}=\frac{80}{3}$ ، وهذا يعني أنه مادام $C_2 \in \left[0,\frac{80}{3}\right]$ وبالتحديد $C_2 \in \left]-\infty,\frac{80}{3}\right] \rightarrow C_2 \leq \frac{80}{3}$ فإن الحل لن يتغير

أما إذا تجاوزت C_2، $\frac{80}{3}$ دج ، أي: $C_2 \geq \frac{80}{3}$ دج فإن X_2 ستدخل في الحل، وبالتالي الحل يتغير ونتحصل على جدول جديد .

X_3: نفس الشيئ

$C_3 \in \left[0,\frac{64}{3}\right]$ وبالتحديد $C_3 \in \left]-\infty,\frac{64}{3}\right] \rightarrow C_3 \leq \frac{64}{3}$

فإن الحل لن يتغير

أما إذا كان $C_3 \geq \frac{64}{3}$ فإننا سنحصل على جدول جديد ، أي أن X_3 سوف يدخل الحل.

5- تحديد مجالات الإمكانية للموارد A_2,A_1

بالنسبة لـ A_1: (أي الورشة الأولى): في هذه الورشة تم استغلال الموارد المتاحة كلها ولدينا سعر ظل قدره $\frac{44}{15}$

لو نظيف Δ وحدة من المورد A_1 فإن

$$x_1=\frac{4000}{3}+\frac{4}{15}(\Delta)\geq 0 \rightarrow \Delta \geq 5000$$

$$x_3=\frac{200}{3}+\Delta\left(-\frac{1}{150}\right)\geq 0 \rightarrow \Delta \leq 10000$$

$$\Delta \in [-5000,10000] \geq 0 \rightarrow A_1[1000,16000]$$

معناه إذا انخفضت ساعات عمل الورشة الأولى إلى غاية (1000سا) أو إذا زادت إلى (6000سا) فإن الحل لا يتغير إلا بالنسبة

$$x_1=\frac{4000}{3}+\frac{4}{15}(\Delta)$$

$$x_4=\frac{200}{3}-\frac{1}{150}(\Delta)$$

$$Z=\frac{56000}{3}+\frac{44}{15}$$

وتبقى مصفوفة المعاملات وسطر التقييم كما هما.

حل مسألة برمجة خطية ببرنامج الإعلام الآلي STORM:
تحتوي هذه البرمجية على العديد من المقاييس الخاصة بمسائل بحوث العمليات والاحصاء، وهي عبارة عن 16 مقياس كما هو موضح في النافذة التالية:



باختيار النافذة الأولى الخاصة بالبرمجة الخطية، يمكن حل مسائل هذا الفصل.

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$MAX\ Z= 4X1+5X2$$
$$3X1+8X2 \leq 200$$
$$5X1+3X2 \leq 400$$
$$X1,X2 \geq 0$$

STORM EDITOR : Linear & Integer Programming Module

Title : PROG LINEAIRE
Number of variables : 2
Number of constraints : 2
Starting solution given : YES
Objective type (MAX/MIN) : MAX

R7 : C2	VAR1	VAR2	CONST TYPE	R H S	RANGE
OBJ COEFF	4.	5.	XXXX	XXXX	XXXX
CONSTR 1	3.	8.	<=	200.	.
CONSTR 2	5.	3.	<=	400.	.

بعد تشغيل البرمجية نحصل على الحل الأمثل التالي:

OPTIMAL SOLUTION – SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)

	Variable	Value	Cost
1	VAR 1	66.6667	4.0000

Slack Variables

4	CONSTR 2	66.6667	0.0000

Objective Function Value = 266.6667

مما يعني أن الحل الأمثل هو : MAX Z =266.6667, X2=0,A2= 66.6667, X1=66.6667

أما فيما يخص أسعار الظل، نحصل على النتائج في الصفحة التالية:

OPTIMAL SOLUTION – DETAILED REPORT

	Variable	Value	Cost	Red. Cost	Status
1	VAR 1	66.6667	4.0000	0.	Basic
2	VAR 2	0.0000	5.0000	-5.6667	Lower bound
Slack Variables					
3	CONSTR 1	0.0000	0.0000	-1.3333	Lower bound
4	CONSTR 2	66.6667	0.0000	0.0000	Basic

Objective Function Value = 266.6667

تظهر أسعار الظل لمختلف معاملات دالة الهدف و الموارد المتاحة في العمود ما قبل الأخير. وبنفس البرمجية يمكن القيام بتحليل الحساسية لهذه المشكلة.

تمارين محلولة في البرمجة الخطية

المثال الأول:

لصنع منتوجين p1 وp2 تستهلك المؤسسة مادتين أوليتين m1 وm2 ، يتم صنع الوحدة الواحدة من P1 باستهلاك 5 كلغ من M1 و1 كلغ من M2 ويتم صنع الوحدة الواحدة من P2 باستهلاك 2 كلغ من M1 و 4 كلغ من M2. علما أن الربح في الوحدة الواحدة من P1 هو 650 DA و من P2 هو 500DA.

1- أوجد المخطط الأمثل للإنتاج بالطريقة البيانية والجبرية علما ان الكمية المتوفرة : M1= 290 M2=130

2- فسر وحلل النتائج المحصل عليها.

3- إذا ما أردنا تحليل حساسية الحل المحصل عليه:

- حدد مدى صلاحية هذا الحل في حالة :

أ- ارتفاع ربح المنتوج(1) إلى 750DA

ب- ارتفاع ربح المنتوج (2) إلى 640 DA

4- إذا مولت المؤسسة بـ 100 كلغ إضافية من M1 ما مصير مخطط الإنتاج؟

حـــل المثال الأول:

تحديد المتغيرات:

المنتوج : $x_1 = P_1$ ، $x_2 = P_2$

1 - الطريقة الجبرية:

$$M_{a\alpha} Z = 650x_1 + 500x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 290 \Rightarrow 5x_1 + 2x_2 = 290 \\ x_1 + 4x_2 \le 130 \Rightarrow -5x_1 - 20x_2 = -650 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad x_2 = 20 \quad -18x_2 = -360$$

نعوض $20 = x_2$ في المعادلة

$$5x_1 + 40 = 290 \Rightarrow 5x_1 = 250$$
$$x_1 = 50$$

2- الطريقة البيانية :

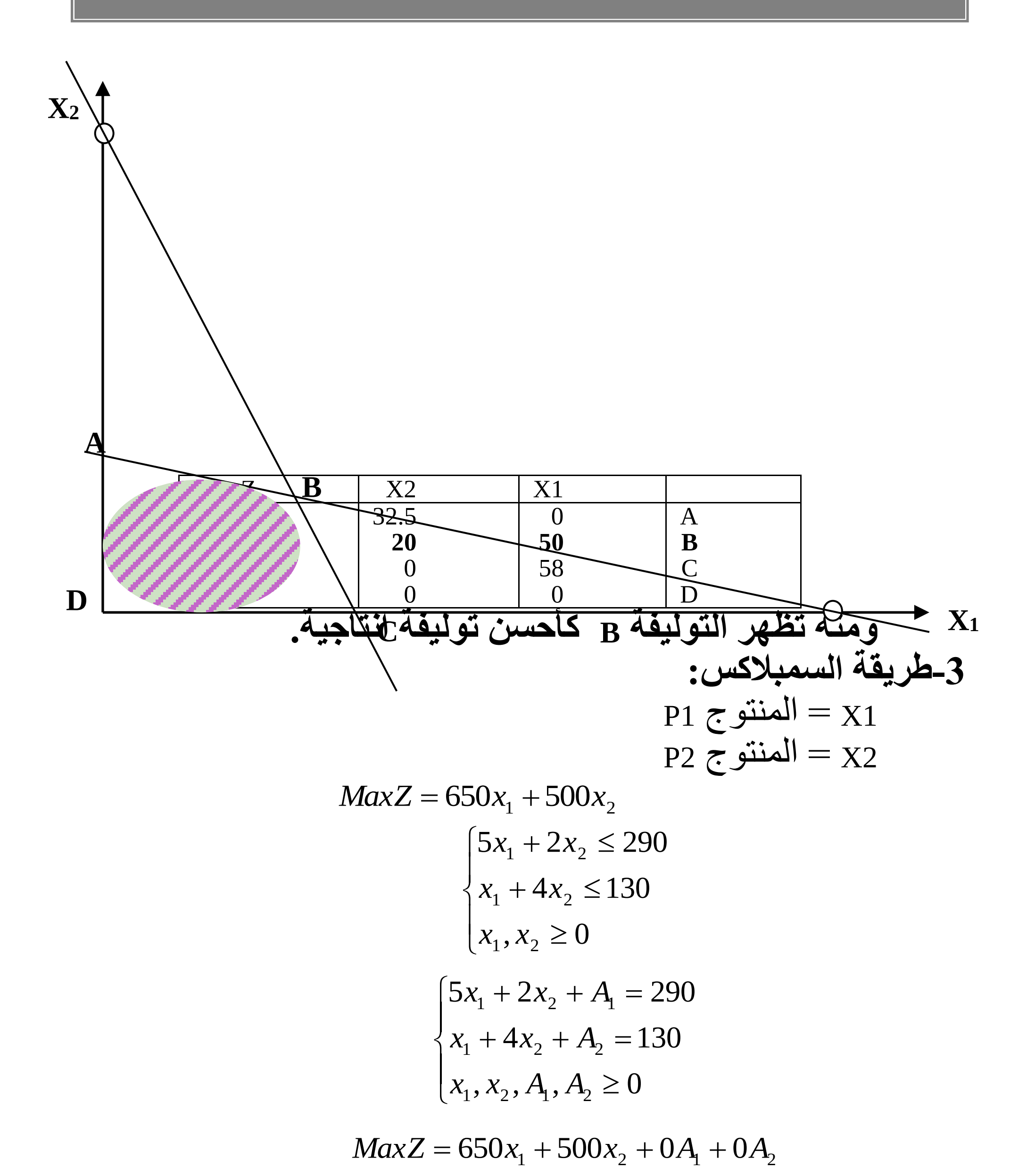
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 290 \rightarrow (1) \\ x_1 + 4x_2 = 130 \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 290 \Rightarrow x_2 = 145 \Rightarrow \quad \mathbf{(0.145)}$$

$$\Rightarrow x2 = 0 \Rightarrow 2x1 = 290 \Rightarrow x1 = 58 \Rightarrow \quad \mathbf{(58.0)}$$

$$(2)\ x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 130 \Rightarrow x_2 = 32.5 \Rightarrow \quad \mathbf{(0.32.5)}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 130 \Rightarrow (130.0)$$



Z	X2	X1	
	32.5	0	A
	20	**50**	**B**
	0	58	C
	0	0	D

ومنه تظهر التوليفة B كأحسن توليفة إنتاجية.

3-طريقة السمبلاكس:

P1 المنتوج = X1

P2 المنتوج = X2

$$MaxZ = 650x_1 + 500x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 290 \\ x_1 + 4x_2 \le 130 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + A_1 = 290 \\ x_1 + 4x_2 + A_2 = 130 \\ x_1, x_2, A_1, A_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MaxZ = 650x_1 + 500x_2 + 0A_1 + 0A_2$$

			650	500	0	0
			x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	290	**5**	2	1	0
0	A_2	130	1	4	0	1

Z = 0	-650	-500	0	0

العنصر الداخل x1

العنصر الخارج A1

العنصر المحور 5

			650	500	0	0
			x_1	x_2	A_1	A_2
650	x_1	58	1	2/5	1/5	0
0	A_2	72	0	**18/5**	-1 /5	1
Z = 37700			0	-240	130	0

العنصر الداخل x2

العنصر الخارج A2

العنصر المحور 18/5

			650	500	0	0
			x_1	x_2	A_1	A_2
650	x_1	50	1	0	4/18	-2/18
500	x_2	20	0	**1**	-1/18	5/18
Z = 42500			0	0	350/3	200/3

3- شرح النتائج

نلاحظ أن كل عناصر Z اكبر أو تساوي 0 وهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل و الربح قدره 42500 و $x_2 = 20$ **و** $x_1 = 50$.

يتحقق ذلك بانتاج 50 وحدة من X1 و 20 وحدة من X2 واستغلال تام للموارد المتاحة.

عناصر عمود A1 تدل على أن زيادة وحدة واحدة مورد A1 في الطاقة الانتاجية سوف يؤدي إلى ربح إضافي قدره 3/350، وزيادة عدد الوحدات المنتجة من x1 بـ 18/4 وحدة وانخفاض عدد الوحدات المنتجة من x2 بـ 18/1 وحدة ;

$$x_1 = 50 + \frac{4}{18}$$

$$x_2 = 20 - \frac{1}{18}$$

$$Z = (50 + \frac{4}{18})650 + 500(20 - \frac{1}{18}$$

4- حالة تغير الربح:نستخدم آخر جدول

أ-تغير ربح M1

			650	500	0	0
			x1	x2	A1	A2
650	x_1	50	1	0	4/18	-2/18
500	x_2	20	0	**1**	-1/18	5/18
Z = 42500			0	0	350/3	200/3

لتوضيح هذا التأثير بدقة، نقوم بإسقاط قيم x1 مع ضربها في α ونضعها في سطر Z :

			α+650	500	0	0
			x1	x2	A1	A2
650+ α	x_1	50	1	0	4/18	-2/18
500	x_2	20	0	**1**	-1/18	5/18
Z = 42500 + 50 α			0	0	350/3 + 4α/18	200/3 - 2α/18

$$\frac{200}{3} - \frac{2\alpha}{18} \geq 0$$

$$\alpha \leq 600$$

أي أن الربح يمكن أن يصل إلى 1250 = 650 + 600 دون أن يتغير الحل الأمثل.

ب-تغير ربح M2

			650	α+500	0	0
			x1	x2	A1	A2
650	x_1	50	1	0	4/18	-2/18
500+ α	x_2	20	0	**1**	-1/18	5/18
Z = 42500 + 20 α			0	0	350/3 – 1α/18	200/3 - 5α/18

$$\frac{350}{3} - \frac{1}{18}\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 2100$$

2100+500=2600

5- التغيرات في المورد الأول

نسمي التغيرات في المورد الأول Δ1

نسمي التغيرات في المورد الثاني Δ2

			650	500	0	0
			x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	290 +Δ1	**5**	2	1	0
0	A_2	130 + Δ2	1	4	0	1
Z = 0			-650	-500	0	0

العنصر الداخل x1

العنصر الخارج A1

العنصر المحور 5

			x_1	x_2	A_1	A_2
650	x_1	50 +Δ/5	1	2/5	1/5	0
0	A_2	72-Δ/5+ Δ2	0	**18/5**	-1/5	1
Z = 0			0	-240	130	0

ما زالت توجد قيمة سالبة في سطر Z

العنصر الداخل x2

العنصر الخارج A2

العنصر المحور 5/18

			650	500	0	0
			x_1	x_2	A_1	A_2
650	x_1	50 +4/18Δ1-2/18 Δ2	**1**	0	4/18	-2/18
500	x_2	20-1/18Δ1+5/18 Δ2	0	1	-1/18	5/18
Z = 42500			0	0	350/3	200/3

$$\begin{cases} 50+\frac{4}{18}\Delta 1-\frac{2}{18}\Delta 2\geq 0 \\ 20-\frac{1}{18}\Delta 1+\frac{5}{18}\Delta 2\geq 0 \end{cases}$$

$-225 \le \Delta 1 \le 360$

$-72 \le \Delta 2 \le 450$

$65 \le 290 + \Delta 1 \le 650$

$58 \le 130 + \Delta 2 \le 580$

وعليه 390 تنتمي إلى المجال فالحل يبقى لا يتغير.

المثال الثاني:

إليك النموذج الآتي:

$$[Min]Z = 2400x \times 100y$$

$$\begin{cases} 34x_1 + 2y \ge 20 \\ 6x_1 + y \ge 30 \\ x_1, y \ge 0 \end{cases}$$

اوجد مخطط الإنتاج الأمثل بواسطة أسلوب M ,

حـــل المثال الثاني:

تحويل النموذج النظامي إلى نموذج معياري:

$$MaxZ = 2400x1 + 1000y + 0A1 + 0A2 + M\Delta 1 + M\Delta 2$$

$$3x_1 + 2y - A1 + \Delta 1 = 20$$
$$6x_1 + y - A2 + \Delta 2 = 30$$

$$x_1, y, A_1, A_2, \Delta 1, \Delta 2 \ge 0$$

			2400	1000	0	0	M	M
			x_1	Y	A1	A2	Δ1	Δ2
M	Δ1	20	3	2	-1	0	1	0
M	Δ2	30	6	1	0	-1	0	1
Z = 50M			2400-9M	1000 -3M	M	M	0	0

			2400	1000	0	0	M	M
			x_1	Y	A1	A2	Δ1	Δ2
M	Δ1	5	0	3/2	-1	½	1	-1/2
2400	X	5	1	1/6	0	-1/6	0	1/6

12000 + 5M	0+600+3/2M	M +400 +1/2M	0+400	-3M/2	0	0

			2400	1000	0	0	M	M
			x_1	Y	A1	A2	Δ1	Δ2
1000	Y	10/3	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3
2400	X	40/9	1	0	1/9	-2/9	-1/9	2/9
Z = 14000			0	0	400	2000	-M/400	M-200

ب-بأسلوب المرحلتين :

$$MinZ = \Delta 1 + \Delta 2$$
$$3x + 2y - e1 + \Delta 1 = 20$$
$$6x + y - e2 + \Delta 2 = 30$$

			0	0	0	0	1	1
			X	Y	A1	A2	Δ1	Δ2
1	Δ1	20	3	2	-1	0	1	0
	Δ2	30	**6**	1	0	-1	0	1
Z =50			-9	-3	1	1	0	0

			0	0	0	0	1
			X	Y	A1	A2	Δ1
1	Δ1	5	0	**3/2**	-1	½	1
0	X	5	1	1/6	0	-1/6	0
Z =5			0	-3/2	1	½	-1

					0	0
			X	Y	A1	A2
1	y	10/3	0	1	-2/3	1/3
0	x	40/9	1	6	1/9	-2/9
Z =0			0	0	0	0

كل عناصر سطر Z معدومة في ا لحل الأمثل.

المثال الثالث:

تنتج مؤسسة منتوجين 1P و 1P بالاستخدام مادتين أوليتين 1M و 2M، حيث يتم صنع الوحدة الواحدة من المنتوج 1P باستهلاك 6 كلغ من 1M و 2 كلغ من 2M. ويتم صنع الوحدة الواحدة من المنتوج 2P

باستهلاك 1 كلغ من 1M و 4 كلغ من 2M. مع العلم أن الربح في الوحدة الواحدة من المنتوج 1P هو 3500 دج، وفي الوحدة الواحدة من المنتوج 2P هو 2100 دج.
- ما هي الخطة المثلى للإنتاج بالطريقة البيانية والجبرية علما بأن الكميات المتوفرة هي:

1M= 600
1M= 420

- لتحليل الحساسية للحل لهذه المسألة:

حالة تغير الربح:

حدد مدى صلاحية هذا الحل في:

- حالة ارتفاع ربح المنتوج (1) إلى 3700 دج.
- حالة ارتفاع ربح المنتوج (2) إلى 2150 دج.

حالة تغير كمية الموارد:

حدد مدى صلاحية هذا الحل في:

- حالة الكمية المتوفرة 1M إلى 500 كلغ.

حل المثال الثالث:

1/ الطريقة الجبرية

إيجاد خطة الإنتاج المثلى بالطريقة الجبرية :

Max 2x2100+1x3500= z
62x + 1x≤600.........(1)
2x4 + 1x2≤420.......(2)
2x،1x≥0

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات:

62x + 1x=600.........(1)
2x4 + 1x2=420.......(2)
2x،1x≥0

بضرب المعادلة (2) في 3 نجد:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_1 - 600 = 0 \ldots\ldots(1) \\ 12x_2 + 6x_1 - 1260 = 0 \ldots(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من (2) نجد (2)-(1):

$(2)-(1) \Leftrightarrow 11x_2 = 660$

$x_2 = 60$

بالتعويض في إحدى المعادلات ولنفترض المعادلة (2) نجد x_1 :

$X_1 = 420/2 - 4(60)/2$

$x_1 = 90$

ومنه النقطة ذات الإحداثيات (x_1, x_2)هي التي تمثل الإنتاج الأمثل:

$(x_1,x_2) = (90,60)$

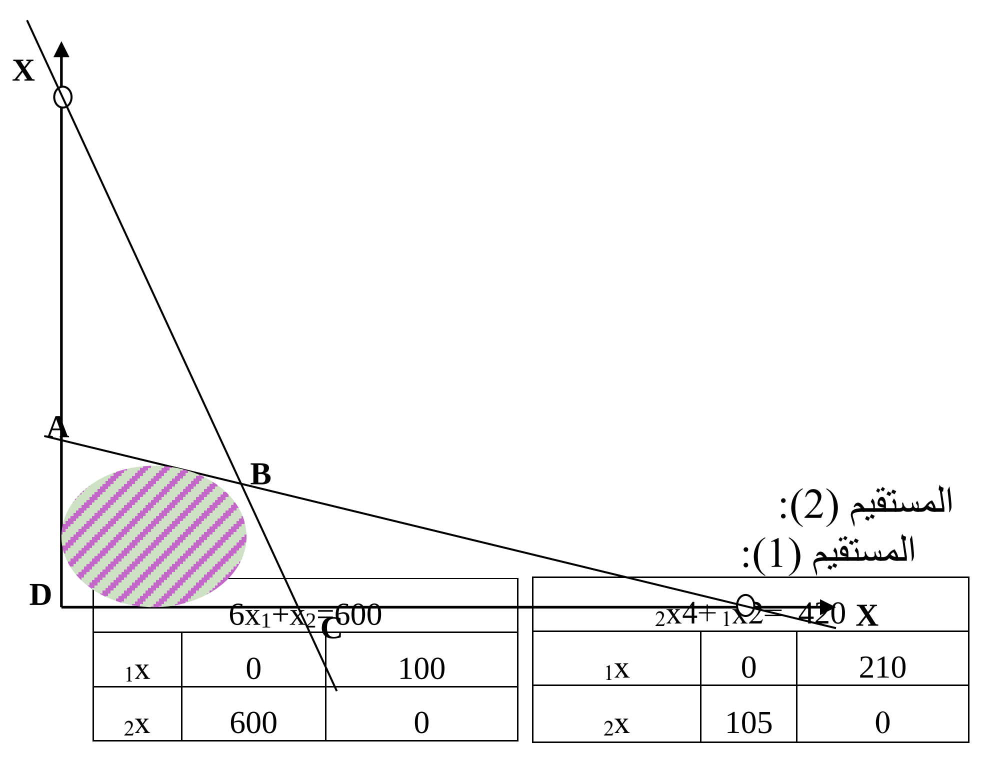
وتصبح: $Max\ z = 3500(90) + 2100(60)$

$Max\ z = 441000$ DA

2/ الطريقة البيانية

إيجاد الخطة المثلى للإنتاج بالطريقة البيانية:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات:



$6x_1+x_2=600$		
x_1	0	100
x_2	600	0

$2x_1+4x_2=420$		
x_1	0	210
x_2	105	0

منطقة الحلول المقبولة هي ABCD.

إيجاد إحداثيتي B: B هي عبارة عن تقاطع المستقيم ذو المعادلة: $6x_1+x_2=600$ مع المستقيم ذو المعادلة: $2x_1+4x_2=420$

عن طريق الإسقاط أو الطريقة الرياضية نجد إحداثيات النقطة B.

<u>وعند التعويض في كل النقاط نجد:</u>

1) عند النقطة A: A(0 . 105)

$$6(0)+(105)=105$$
$$2(0)+4(105)=420$$

$z = 3500(0)+2100(105)$

$z = 220500$

2) عند النقطة B:

$$6(90)+(60)=600$$
$$2(90)+4(60)=420$$

$$z = 3500(90)+2100(60)$$
$$z = 441000$$

3) عند النقطة C: C(100,0)

$$6(100)+(0)=600$$
$$2(100)+4(0)=200$$

$$z = 3500(100)+2100(0)$$
$$z = 350000$$

4) عند النقطة D: D(0 . 0)

كل المعادلات تساوي الصفر.

	X1	X2	Z
A	0	105	220500
B	**90**	**60**	**441000**
C	100	0	350000
D	0	0	0

ومنه نستنتج أن النقطة B هي التي تحقق Max z.

طريقة السمبلاكس:

$$\text{Max } z = 3500x_1 + 2100x_2$$

$$6x_1 + x_2 \le 600$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 420$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$6x_1 + x_2 + A_1 = 600$$

$$2x_1 + 4x_2 + A_2 = 420$$

$$\text{Max } z = 3500x_1 + 2100x_2 + 0A_1 + 0A_2$$

			3500	2100	0	0
A_j	v	b_j	x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	600	6	1	1	0
0	A_2	420	2	4	0	1
z=0			-3500	-2100	0	0
3500	x_1	100	1	1 / 6	1 / 6	0
0	A_2	220	0	22 / 6	-2 / 6	1
z=350000			0	9100 / 6-	3500 / 6	0
3500	x_1	90	1	0	2 / 11	-1 / 22
2100	x_2	60	0	1	-1 / 11	3 / 11
z^*=441000			0	0	4900 / 11	4550 / 11

تحديد مدى صلاحية الحل في حالة:

أ) ارتفاع ربح المنتوج الأول إلى 3700:

نسمي التغير في ربح المنتوج الأول بـ α_1 وبالتالي يصبح الربح هو

$3500 + \alpha_1$

	$+\alpha_1$	2100	0	0

			3500			
A_j	v	b_j	x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	600	6	1	1	0
0	A_2	420	2	4	0	1
		z=0	$-\alpha_1$ -3500	-2100	0	0
α_1+ 3500	x_1	100	1	1 / 6	1 / 6	0
0	A_2	220	0	22 / 6	-2 / 6	1
		$z=350000+100\alpha_1$	0	$(9100/6)+(1/6)\alpha_1$	$(3500/6)+(1/6)\alpha_1$	0
α_1+ 3500	x_1	90	1	0	2 / 11	-1 / 22
2100	x_2	60	0	1	-1 / 11	3 / 11
		$z^*=441000+90\alpha_1$	0	0	$(4900/11)+(2/11)\alpha_1$	$(4550/11)-(1/11)\alpha_1$

ليكون هذا الحل هو الأمثل يجب أن تكون القيم في السطر z موجبة أو تساوي 0 أي أن:

$$(4900/11)+(2/11)\alpha_1 \geq 0$$

$$(4550/11)-(1/11)\alpha_1 \geq 0 \Rightarrow (4550/11) \geq (1/11)\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \geq 4550$$

لدينا α_1 المتغير في الربح معناه يصبح الربح:

$$\pi = \alpha_1 + 3500$$

$$\lambda = 3500+4550=8050$$

معناه أن الربح يمكن أن يتغير في المنتوج الأول حتى 8050 **DA** دون أن يتغير حجم الإنتاج، ولو يتجاوز الربح

8050 DA في المنتوج الأول فإن الحل الأمثل يتغير.

ب) حالة ارتفاع ربح المنتوج الثاني إلى 2150:

نسمي التغير في ربح المنتوج **الثاني** بـ α_2 وبالتالي يصبح الربح هو **α_2+ 2100**

			3500	α_2+ 2100	0	0
A_j	v	b_j	x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	60	6	1	1	0

		0				
0	A_2	420	2	4	0	1
z=0			-3500	$-_2\alpha$-2100	0	0
3500	x_1	100	1	1 / 6	1 / 6	0
0	A_2	220	0	22 / 6	-2 / 6	1
z=350000			0	$_2\alpha$(9100/ 6)--	3500 / 6	0
3500	x_1	90	1	0	2 / 11	-1 / 22
$_2\alpha$+ 2100	x_2	60	0	1	-1 / 11	3 / 11
z^*=441000			0	0	(1/11)$_2\alpha$(4900/ 11)-	11(+)3/11($_2\alpha$(4550/

وليكون هذا الحل هو الأمثل يجب أن تكون القيم في السطر z موجبة أو تساوي 0 أي أن:

$$\begin{cases} (4900/\ 11)\text{-}(1/11)_2\alpha\geq 0.......\ (1) \\ (4550/11(+)3/11(_2\alpha\geq 0 \quad \text{محقق} \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد أن:

$$(1)\geq(1/11)_2\alpha\ (4900/\ 11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ _2\alpha\geq 4900$$

$$\Rightarrow\ _2\alpha\leq 4900$$

ولدينا $_2\alpha$ هو المتغير في الربح المنتوج **الثاني** معناه أن الربح في هذا المنتوج هو:

$$\pi = {_2\alpha}+ 2100$$

$$\lambda= 2100+4900=7000$$

معناه أن الربح يمكن أن يتغير في المنتوج **الثاني** حتى **7000 DA** دون أن يتغير حجم الإنتاج، ولو يتجاوز الربح **7000 DA** في المنتوج **الثاني** فإن الحل الأمثل يتغير.

II/ حالة تغير كمية الموارد:

• تحديد المجال للحل في حالة تغير الكمية المتوفرة في المادة M_1 أي في حالة نقص الكمية المتوفرة من الموارد M_1 إلى 500 وحدة.

- نسمي التغير في كمية المادة M_1 بـ Δ_1
- $M_1 = 600 + \Delta_1$
- نسمي التغير في كمية المادة M_2 بـ Δ_2 $\Leftarrow$ $M_2 = 420 + \Delta_2$

			3500	2100	0	0
A_j	v	b_j	x_1	x_2	A_1	A_2
0	A_1	$600 + \Delta_1$	6	1	1	0
0	A_2	$420 + \Delta_2$	2	4	0	1
z=			-3500	-2100	0	0
3500	x_1	$100 + (\Delta_1/6)$	1	1 / 6	1 / 6	0
0	A_2	$220 - (2\Delta_1/6) + \Delta_2$	0	22 / 6	-2 / 6	1
$z = 350000 + (3500\Delta_1/6)$			0	-(9100/6)	3500 / 6	0
3500	x_1	$90 + (2\Delta_1/11) - (\Delta_2/11)$	1	0	2 / 11	-1 / 22
2100	x_2	$60 - (\Delta_1/11) + (3\Delta_2/11)$	0	1	-1 / 11	3 / 11
$z^* = 441000 + (4900\Delta_1/11) + (9100\Delta_2/22)$			0	0	(4900/11)	(4550/11)

وليكون هذا الحل هو الأمثل يجب أن تكون القيم في السطر z موجبة أو تساوي 0 أي أن:

وأن لا تكون الكميات المتوفرة سالبة:

بفرض $\Delta_2 = 0$ نجد مجال تغير Δ_1

$$\begin{cases} 90 + (2/11)\Delta_1 \geq 0 \\ 60 - (\Delta_1/11) \geq 0 \\ 441000 + (4900\Delta_1 / 11) \geq 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \Delta_1 \geq -495 \\ \Delta_1 \leq 660 \end{cases}$$

$$-495 \leq \Delta_1 \leq 660$$

$_1\Delta \geq 1260+600 \geq 105$

أي مهما تغيرت كمية المواد الموارد (1) داخل هذا المجال فإن حجم الإنتاج لا يتغير، أما إذا خرجت عن هذا المجال فإن حجم الإنتاج الأمثل يتغير:

فمثلا عندما يكون لدينا $_1M=500$ نجد أن: **$1\Delta + 600=1100$**، تنتمي لهذا المجال ومنه حجم الإنتاج لا يتأثر بهذا النقص.

وبفرض $_1\Delta=0$ نجد مجال تغير $_2\Delta$

$$\begin{cases} 90+(2/11)_1\Delta-)_2\Delta/22) \geq 0 \\ 60-_1\Delta)/3)+(11/_2\Delta(11 \geq 0 \\ 441000+(4900_1\Delta / 11)+(_2\Delta 9100/22) \geq 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} _2\Delta \geq -220 \\ _2\Delta \leq 1980 \\ -_2\Delta \geq 220 \geq 1980 \\ _2\Delta \geq 200+420 \geq 2400 \end{cases}$$

المثال الرابع:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$[Min]c= y800 + x2200$

$$\begin{cases} 4y2 + x \geq 35 \\ y + x5 \geq 20 \\ y ،x \leq 0 \end{cases}$$

أوجد خطة الانتاج المثلى بواسطة أسلوب M وأسلوب المرحلتين.

استنتج المسألة المعكوسة للمسألة المطروحة وكذا حلها.

حل المثال الرابع:

إيجاد مخطط الإنتاج الأمثل بواسطة أسلوب M:

y800 + x2200
[Min]c=
4y2 + x ≥35
y + x5≥ 20
y ،x ≤0

الصيغة القياسية:

$4x + 2y - A_1 + \Delta_1 = 35$

$5x + y - A_2 + \Delta_2 = 20$

$[Min]c= y800 + x2200 + 0A_1 + 0A_2 + M\Delta_1 + M\Delta_2$

			2200	800	0	0	M	M
$_jA$	v	$_jQ$	x	y	$_1A$	$_2A$	Δ_1	Δ_2
M	Δ_1	35	4	2	-1	0	1	0
M	$_2\Delta$	20	5	1	0	-1	0	1
c = 60			2200 - 9M	800 - 3M	M-	M-	0	0

			2200	800	0	0	M	M
$_jA$	v	$_jQ$	x	y	$_1A$	$_2A$	Δ_1	Δ_2
M	Δ_1	19	0	6/5	-1	4/5	1	-4/5
2200	x	4	1	1/5	0	-1/5	0	1/5
= 8800 + 19M c			0	- (6/5)M 360	M	- (4/5)M 440	0	(9/5)M – 440

			2200	800	0	0	M	M
$_jA$	v	$_jQ$	x	y	$_1A$	$_2A$	Δ_1	Δ_2
800	y	95/6	0	1	-5/6	4/6	5/6	-4/6
2200	x	5/6	1	0	1/6	-2/6	-1/6	2/6
$c^* = 14500$			0	0	300	200	M - 300	M – 200

إيجاد مخطط الإنتاج الأمثل بواسطة أسلوب المرحلتين:

[Min]c= y800 + x2200
4y2 + x ≥35
y + x5≥ 20

$$[Min]c= \Delta_1 + \Delta_2$$

الصيغة القياسية:

$$4x + 2y - A_1 + \Delta_1 = 35$$

$$5x + y - A_2 + \Delta_2 = 20$$

			0	0	0	0	1	1
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2	Δ_1	Δ_2
1	Δ_1	35	4	2	-1	0	1	0
1	Δ_2	20	5	1	0	-1	0	1
c = 60			9 -	3 -	1	1	0	0

			0	0	0	0	1
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2	Δ_1
1	Δ_1	19	0	6/5	-1	4/5	1
0	x	4	1	1/5	0	-1/5	0
c = 8			0	(6/5) -	1	(4/5) -	0

			0	0	0	0
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2
0	y	95/6	0	1	-5/6	4/6
0	x	5/6	1	0	1/6	-2/6
c = 0			0	0	0	0

			2200	800	0	0
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2
800	y	95/6	0	1	-5/6	4/6
2200	x	5/6	1	0	1/6	-2/6

$z^* = 14500$	0	0	300	200

المسألة المعكوسة:

$$[Min]c = y800 + x2200$$
$$4y2 + x \geq 40$$
$$y + x5 \geq 20$$
$$y ، x \leq 0$$

المسألة المعكوسة لهذه المسألة هي المسألة:

$${}_{2}\mu 20 + {}_{1}\mu 40 = [Max]z$$
$$4{}_{1}\mu + 5{}_{2}\mu \leq 2200$$
$${}_{2}\mu + {}_{1}\mu 2 \leq 800$$
$${}_{2}\mu ، {}_{1}\mu \geq 0$$

يمكن استنتاج الحل لهذه المسألة كما يلي:

Min

			2200	800	0	0
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2
800	y	95/6	0	1	-5/6	4/6
2200	x	5/6	1	0	1/6	-2/6
		z = 14500	0	0	300	200

			35	20	0	0
A_j	v	Q_j	x	y	A_1	A_2
20	y	200	0	1	2/6	-4/6
40	x	300	1	0	-1/6	5/6
		z = 14500	0	0	-5/6	-95/6

لمثال الخامس:

ينتج مصنع سلعتين تدخل في إنتاجهما مادتان من المواد الخام، فإذا كانت الكميات المتاحة من المواد الخام و نسبة مكونات كل وحدة سلعة من المواد الخام و ربح الوحدة مبينة في الجدول التالي:

الكميات المتاحة من المواد الخام	نسبة مكونات كل وحدة من السلعة		المواد الخام
	السلعة الثانية	السلعة الأولى	

مادة خام (1) مادة خام (2)	3 6	5 2	15 24
ربح الوحدة من السلعة	2	1	

المطلوب: - تحديد الكميات المثلى للإنتاج من كل من السلعتين لتحقيق أقصى ربح ممكن للمصنع.

حل المثال الخامس:

نفرض أن الكمية المنتجة من السلعة الأولى و السلعة الثانية هي x_1, x_2 و على ذلك فأنه يمكن صياغة النموذج الرياضي للمشكلة كالتالي:

المطلوب إيجاد x1,x2

$$F(X) = 2X1 + X2$$

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

$$6x_1 + 2x_2 = 24$$

$$X_1 \geq 0 \text{ , } X_2 \geq 0$$

تحول القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة المتغيرات المتممة X_3 , X_4

$$3X_1 + 5X_2 + X_3 = 15$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$$

و يصبح الجدول الأساسي في طريقة السمبلاكس كما يلي :

المتغيرات الأساسية	X_4	x_{32}	x	x_1	الثوابت
X_3 X_4	3 6	5 2	1 0	0 1	15
-F(x)	2	1	0	0	0

* الحل المبدئي هو $X_1 = 0$ $X_2, = 0$

$$X_3 = 15 \text{ , } X_4 = 24$$

$$F(X) = 0$$

و حيث أن معاملات التغيير في الصف الأخير هي 0،0،1،2

و هي موجبة او أصفار فالحل ليس هو الحل الأمثل

أيضا في الصف الأخير نجد أن معامل x_1 يساوي 2 و هو اكبر من معامل x_2

*x_1 هو المتغير الداخل بقسمة الثوابت 15,24 على عناصر العمود المحوري كل على نظيره نجد أن النسب هي 4 = ,5 = 15/3

*المتغير x_1 هو المتغير الخارج 24/6

ثم تطبق القواعد التحويلية فنحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_4 x_3	الثوابت
X_3	0	4	1 -2	3
X_1	1	1/3	0 1/6	4
-F(x)	0	1/3	0 -1/3	-8

* الحل الجديد هو x_2 **=0**, x_4 **=0** متغيرات غير أساسية.

x_1 **=4**, x_3 **=3** متغيرات أساسية.

F(x) =8.

و بتطبيق اختبار الأمثلية نجد أن هذا الحل ليس هو الحل الأمثل كذلك نجد أن x_2 هو المتغير الداخل.

و أن x_3 هو المتغير الخارج.

ثم نطبق القواعد التحويلية فنحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	X_4 x_3 x_2 x_1	الثوابت
X_2 X_1	0 1 1/4 -1/8 1 0 -1/12 5/24	3/4 15/4
-F(x)	0 0 -1/12 -7/24	-33/4

* الحل الجديد هو x_3 =0, x_4 =0 متغيرات غير أساسية.

x_1 **=15/4** , x_2 **=2** متغيرات أساسية.

F(x) =33/4.

و بتطبيق اختبار الأمثلية نجد أن هذا هو الحل الأمثل.

<u>المثال السادس:</u>

لدينا:

$$F(x)= 3x_4 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

المطلـوب:

- إيجاد قيم x_1 , x_2 التي تجعل الدالة $F(x)$ نهاية صغرى تحت شرط القيود الهيكلية.

حـــــل المثال السادس:

نحول القيود الهيكلية إلى معادلات و ذلك بطرح المتغيرات المتممة، x_1 و x_2 و إضافة المتغيرات الصناعية x_5 , x_6 أي:

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 16$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1,2,...6$$

أما دالة الهدف المرحلة الأولى فيمكن صياغتها كالآتي:

$$\mathbf{w = x_5 + X_6}$$

بالتعويض عن المتغيرات الصناعية و التي هي في هذه اللحظة متغيرات أساسية بدلالة باقي المتغيرات من المعادلتين المناظرتين ينتج أن:

$$w = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 + 23$$

أي أن:

$$-w = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -23$$

و للوصول إلى حل أساسي مسموح به للنظام الأصلي من المعادلات يجب أن تؤول w إلى الصفر.

و لذلك فالهدف الأساسي في المرحلة الأولى هو جعل الدالة w أصغر ما يمكن فإذا حدث أن كانت:

(أ): $Min , w \geq 0$ فإنه ليس للمشكلة الأصلية أي حل أساسي مسموح به.

(ب): $Min , w = 0$ فإننا نحصل على حل أساسي مسموح به للنظام الأصلي و يمكننا بدأ المرحلة الثانية للحل و ذلك بحذف كل الأعمدة الخاصة بالمتغيرات الصناعية و كذلك السطر الخاص بدالة الهدف w.

و بتطبيق طريقة السمبلاكس نحصل على الجداول المتتالية التالية:

المتغيرات الأساسية	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الثوابت
X_5	2	1	-1	0	1	0	7
X_6	1	4	0	-1	0	1	16
-F(x)	3	4	0	0	0	0	0
w-	-3	-5	1	1	0	0	-23
X_5	7/4	0	-1	1/4	1	-1/4	3
X_2	1/4	1	0	-1/4	0	1/4	4
-F(x)	2	0	0	1	0	-1	-16
w-	-7/4	0	1	-1/4	0	5/4	-3
X_1	1	0	-4/7	1/7	4/7	-1/7	12/7
X_2	0	1	1/7	-2/7	-1/7	2/7	25/7
-F(x)	0	0	8/7	5/7	-8/7	-5/7	-136/7
w-	0	0	0	0	1	1	0

و حيث أن أدنى قيمة للدالة w هي صفر فيوجد للمشكلة حل مسموح به و يصبح الجدول النهائي الخاص بإيجاد قيمة للدالة F(x) على الصورة التالية:

المرحلة الثانية

المتغيرات الأساسية	X_1	x_2	x_3	x_4	الثوابت
X_1	1	0	-4/7	1/7	12/7
X_2	0	1	1/7	-2/7	25/7
-F(x)	0	0	8/7	5/7	-136/7

الفصل الثالث
البرمجة بالأعداد الصحيحة

عند استعمال البرمجة الخطية في حل مشكلة الأمثلية و تحت قيود ما، هناك شرطان لابد من مراعاتهما:

- المتغيرات يجب أن تكون مستمرة.
- دالة الهدف وكذا القيود هي دوال خطية للمتغيرات.

هذان الشرطان أو الفرضيتان قد تعيقان في بعض الحالات، عندما يتعلق الأمر بـ:

- النشاطات المسيرة غير قابلة للتجزئة.
- عندما تكون الدوال المعنية غير خطية.

في مثل هذه الحالات نلجأ إلى طرق وتقنيات أخرى للحل مثل البرمجة بالأعداد الصحيحة.

تسمح البرمجة بالأعداد الصحيحة بمعالجة مشاكل تخصيص الموارد حيث لا يسمح النشاط بالتجزئة

أو التقسيم، نذكر مثل:

- إنتاج سلسلة تصنيع.
- إنتاج التجهيزات الكبرى(ناقلات بحرية، مفاعلات نووية).

في مثل هذه الأمثلة لا يمكن أن تأخذ المتغيرات سوى أعدادا صحيحة.

كما تسمح البرمجة بالأعداد الصحيحة بمعالجة الوضعيات التي يكون فيها القرار من طبيعة ثنائية:

الإستثمار (س) منجز أم لا، المنتوج (ع) منجز أم لا.

في مثل هذه الحالات لا نكتفي بتقريب الحلول التي نجدها في تطبيق البرمجة الخطية المعروفة، بل نلجأ

إلى تقنيات محددة، وطريقة GOMORY وطريقة BRANCH AND BOUND هما أشهر هذه الطرق.

مثال:

$$\text{Max } Z = 4x1 + 6x2$$

$$2x1+2x2 \leq 11$$

$$7x1+x2 \leq 21$$

$$x1, x2 \geq 0$$

$$x1, x2 \in \mathbf{N}$$

مهما كان المشكل نستعمل البرمجة الخطية العادية ← جدول السمبلاكس

				4	6	0	0
				x_1	x_2	A_1	A_2
6	X_2	4	$\frac{4}{13}$	0	1	$\frac{7}{13}$	$\frac{-1}{13}$
4	X_1	2	$\frac{5}{13}$	1	0	$\frac{-1}{13}$	$\frac{2}{13}$
		Z=35 $\frac{5}{13}$		0	0	$\frac{38}{13}$	$\frac{2}{13}$

$$Z=\frac{460}{13}=35\ \frac{5}{13} \quad x_1=\frac{31}{13}=2\ \frac{5}{13} \quad x_2=\frac{56}{13}=4\ \frac{4}{13}$$

وهذا الحل غير مقبول لأن $x_1, x_2 \in N$، وهنا يجب التحسين بأحد الطريقتين المذكورتين أعلاه:

1- طريقة gomory

تستعمل هذه الطريقة في حالة عدم الوصول إلى الحل الأمثل بالطريقة العادية (لكن $\in N$).

تتمثل هذه الطريقة في الخطوات التالية:

إضافة قيد جديد للمسألة الأولية، يحدد هذا القيد ويسمى قيد قوموري(contrainte de GOMORY) باستعمال الأجزاء غير الكاملة ثم، بعد إضافة القيد، نقوم بالحل بطريقة السمبلاكس المعروفة.

بالنسبة لإختيار القيد، يجب مراعاة ما يأتي:

نختار القيد بالنسبة لمتغيرة من المتغيرات القاعدية التي ليست عددا كاملا، ثم نختار بالنسبة للمتغيرة التي تتضمن الجزء غير الكامل الأكبر.

نبحث في كتابة المتغيرات بالشكل:

$$\mathbf{X_k = Q_k - \sum x_{kj} * y_j}$$

Q_k: قيمة المتغيرة القاعدية.

x_{kj}: العنصر الموجود المناسب للخط K والعمود J.

$$\mathbf{Qk=Ak + Dk}$$

$$\mathbf{Xkj= Akj + Dkj}$$

$$\mathbf{Xk= Ak + Dk - \sum Akj * yj - \sum Dkj * yj \quad , \quad Dk \geq 0}$$

ليكون كاملا $[Dk - \sum Dkj * yj] \in N$

بما أن $\mathbf{0 \leq Dk < 1}$ و $\mathbf{0 \leq Dkj < 1}$ إذن:

$\sum Akj \ yj \leq 0$ وهذا هو قيد GOMORY

نختار المتغيرة ذات الجزء غير الكامل الأكبر وليكن X_1،

$$2+\frac{5}{13}=x1+(-\frac{13}{13}+\frac{12}{13})x3+(0+\frac{2}{13})x4$$

$$2+\frac{5}{13}=x1+(-1+\frac{12}{13})x3+(\frac{2}{13})x4$$

$$x1=2+\frac{5}{13}-(-1+\frac{12}{13})x3-(\frac{2}{13})x4$$

قيد GOMORY هو ≤ 0 Dk - ∑ Dkj * yj ⇐

$$\frac{5}{13}-\frac{12}{13}x_3-\frac{2}{13}x_4 \leq 0$$

لكن هذا القيد غير كافي، أي بهذا الشكل لا يمكن إدخاله ، بل يجب تعديل هذا القيد على أساس المتغيرات القاعدية. نستخرج X3 و X4 من القيود الأساسية:

$$x1+2x2\leq 11 \Rightarrow x1+2x2+x3=11 \Rightarrow x3=11-x1-2x2$$

$$7x1+x2\leq 21 \Rightarrow 7x1+x2+x4=21 \Rightarrow x4=21-7x1-x2$$

إذن قيد GOMORY هو $2x1+2x2\leq 13$ وتصبح المسألة على الشكل الآتي:

$$\frac{5}{13}-\frac{12}{13}(11-x1-2x2)-\frac{2}{13}(21-7x1-x2)\leq 0$$

$$\frac{5}{13}-\frac{132}{13}+\frac{12}{13}x1+\frac{24}{13}x2-\frac{42}{13}+\frac{14}{13}x1+\frac{2}{13}x2\leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{169}{13}+\frac{26}{13}x1+\frac{26}{13}x2\leq 0 \Rightarrow -13+2x1+2x2\leq 0$$

$$Max\ 4x1+6x2$$
$$x1+2x2\leq 11$$
$$7x1+x2\leq 21$$
$$2x1+2x2\leq 13$$
$$x1,x2\geq 0$$
$$x1,x2\in N$$

ونعيد الحل مرة أخرى

	4	6	0	0	0

			x_1	x_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	11	1	2	1	0	0
0	X_4	21	7	1	0	1	0
0	X_5	13	2	2	0	0	1
		Z=0	-4	-6	0	0	0
6	X_2	11/2	1/2	1	1/2	0	0
0	X_4	31/2	13/2	0	-1/2	1	0
0	X_5	2	1	0	-1	0	1
		Z=33	-1	0	3	0	0
6	X_2	9/2	0	1	1	0	-1/2
0	X_4	5/2	0	0	6	1	-13/2
4	X_1	2	1	0	-1	0	1
		Z=35	0	0	2	0	1

$$x2 = \frac{9}{2} \Rightarrow$$ حل غير مقبول

إذن يجب التحسين:

$$\frac{9}{2} = x2 + x3 - \frac{1}{2}x5$$

$$4 + \frac{1}{2} = x2 + x3 + (-\frac{1}{2})x5$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{1}{2} = x2 + x3 - x5 + \frac{1}{2}x5$$

$$\Rightarrow x2 = 4 + \frac{1}{2} - x3 + x5 - \frac{1}{2}x5$$

$$Dk - \sum Dkj * Yj \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x5 \leq 0$$

$$x5 = 13 - 2x1 - 2x2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{13}{2} + x2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x1 + x2 \leq 6$$

وتصبح المسألة:

$$Max\, 4x1 + 6x2$$
$$x1 + x2 \leq 11$$
$$7x1 + x2 \leq 21$$
$$2x1 + 2x2 \leq 13$$
$$x1 + x2 \leq 6$$
$$x1, x2 \geq 0, et\, x1, x2 \in N$$

الحل الأمثل هو

$$x1 = 1$$
$$x2 = 5$$
$$Z = 34$$

ملاحظة: يكون الحل أمثلا إذا كانت المتغيرات القاعدية كاملة و نلاحظ أن دالة الهدف أقل من المسألة الأولى والتحسين الأول

2- طريقة التفريع والتحديد Branch and bound

اذا احتوى الحل على متغيرات غير صحيحة، فانه يجب تقريب عناصر الحل إلى أقرب الأعداد الصحيحة الممكنة للحصول على التقريب الثاني وهكذا....

التفريع: Branching

فإذا كان Yj غير صحيح، فان $A2 < Yj < A1$ ، حيث تكون (A2) و(A1) أعدادا صحيحة لا سلبية.

ويتولد برنامج أعداد صحيحة بتزويد برنامج الأعداد الصحيحة الأصلي بأي من القيدين $x1 \leq i2$. تسمى هذه الطريقة التفريغ ولها تأثير على تقليص المنطقة الممكنة بطريقة يمكن بها حذف الحل الحالي للأعداد غير الصحيحة في Xi ولكنها تحافظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للمسألة الأصلية.

التحديد: Bounding

بفرض تعظيم الدالة الهدفية فإن النفريع يستمر حتى الحصول على الأعداد الصحيحة الأولى (الذي يكون حل أعداد صحيحة). وتصبح قيمة الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأولى هي الحد الأسفل للمسألة، وكل البرامج التي تؤدي إلى حلولها الأولى- سواءا أعدادا صحيحة أم لا- إلى قيم دالة هدفية أصغر من الحد الأسفل ، تصبح ملغاة.

يستمر التفريع من هذه البرنامج التي لها تقريب أولي بأعداد غير صحيحة، والتي تعطي قيما للدالة الهدفية أكبر من الحد الأسفل. وإذا لم يتحقق في هذه العملية أن يعطى حل الأعداد الصحيحة الجديدة قيمة للدالة الهدفية أكبر من القيمة الحالية للحد الأسفل، فإن هذه القيمة للدالة الهدفية تصبح حدا أسفل جديد، ويلغي البرنامج الذي نتج عنه الحد الأسفل القديم، وكل البرامج التي يؤدي تقريبها الأول إلى قيم للدالة الهدفية أصغر من الحد الأسفل الجديد. وتستمر عملية التفريع حتى لا توجد أي برامج لها تقريب أول أعداد غير صحيحة متبقية تحت الإعتبار. وعند هذه النقطة، فإن حل الحد الأسفل الحالي هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي.

في حالة تصغير الدالة الهدفية تظل الطريقة نفسها، ما عدا أن الحد الأعلى يستخدم، لذلك فإن قيمة حل الأعداد الصحيح الأول يصبح حدا أعلى للمسألة، وتلغى البرامج عند قيم التقريب الأول z الأكبر من الحد الأعلى الحالي.

الإعتبارات الحسابية

يتم التفريع دائما من البرامج التي تظهر قريبة من الحل الأمثل. وعندما يوجد عدد من العناصر لتفريع أكثر، نختار التفريع ذا أكبر قيمة لـ z ، إذا كان الهدف تعظيم الدالة الهدفية أو التي لها أصغر قيمة لـz إذا كان الهدف تصغير الدالة الهدفية.

تضاف القيود الإضافية واحدا في كل مرة. إذا احتوى التقريب الأول على أكثر من متغير واحد غير صحيح، فنفرض هذه القيود الجديدة على هذا المتغير الذي غالبا ما يكون عددا صحيحا، بمعنى أن المتغير الذي يقترب جزء الكسر فيه إلى 0.5، ولو حدث تساو يختار الذي يقوم بالحل أحد هذه المتغيرات.

من الممكن لأي برنامج أعداد صحيحة أو أي برنامج خطي مرتبط به أن يكون له أكثر من حل أمثل. وفي كلتا الحالتين فإننا نتمسك باختيار أحدهما كحل أمثل مع ترك الباقي.

بالنسبة للمسألة السابقة، الأعداد ليست كاملة ويمكن كتابتها كما يأتي:

$$x = E + D$$
$$[E < x^* < E + 1]$$
$$x^* \in N$$

$$\begin{cases} x^* \leq E \\ x^* \geq E + 1 \end{cases}$$

في المثال السابق، لدينا قيم x1 و x2 أعدادا غير كاملة، سنحاول تطبيق مبادئ هذه الطريقة عليهما؛

نبدأ بأحدهما:

<u>نبدأ بـ x1:</u>

$$x1^* \leq 2$$
$$x1^* \geq 3$$

يجب إعادة حل المسألتين

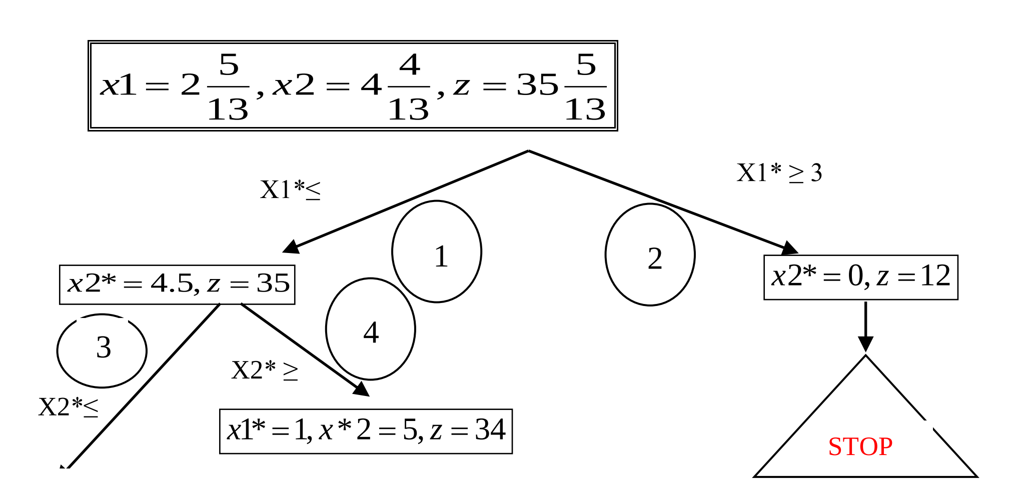
(1)

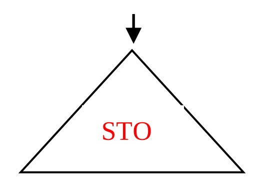
$$Max\, 4x1 + 6x2$$
$$x1 + 2x2 \leq 11$$
$$7x1 + x2 \leq 21$$
$$x1 \geq 3$$

(2)

$$Max\, 4x1 + 6x2$$
$$x1 + 2x2 \leq 11$$
$$7x1 + x2 \leq 21$$
$$x1 \leq x2$$

في المسألة 1 لدينا قيم غير كاملة، لكن الربح أكبر، لذا بقي البحث في هذه الجهة، ثم في 3 و 4 لدينا أعدادا كاملة، ولكن نختار القيمة الأكبرلـ z*.





<u>لو بدأنا بـ X_2:</u>

لدينا الحل (2) يستوفي جميع الشروط:

- الأعداد كاملة
- الربح أمثل

$$x1 = 2\frac{5}{13}, x2 = 4\frac{4}{13}, z = 35\frac{5}{13}$$

$X_2 \leq 4$ $\quad$ $X_2 \geq 5$

$x1 = \frac{17}{7}, x2 = 4, z = 32\frac{6}{7}$ (1)

$x1^* = 1, x2^* = 5, z^* = 34$ (2)

التمرين:

قرر مجلس المالية لمؤسسة صناعية استثمار مبلغ 600000دج لشراء آلات الإنتاج خاصة، ووقع الإختيار على ثلاثة أنواع من الآلات (C,B,A) والجدول الموالي يوضح المعلومات الخاصة بالآلات:

نوع الآلة	تكلفة شراء الآلة الواحدة (دج)	مدة تشغيل الآلة الواحدة في اليوم(ساعة)	إنتاج الآلة الواحدة في الساعة (وحدة/ساعة)	عدد العمال المطلوبين لكل آلة
A	6000	8	10	1
B	8000	7	15	1
C	10000	6	30	2

يتوفر لدى المؤسسة 100 عاملا يمكن استخدامهم على الآلات، كما أن المصنع لا يستطيع شراء أكثر من 80 آلة إضافية.

المطلوب: النموذج الرياضي الذي يمكن إدارة المؤسسة من تحديد عدد الآلات اللازمة من كل نوع لتحقيق أكبر طاقة إنتاجية ممكنة.

<u>مثال محلول ببرمجية Storm:</u>

لدينا النموذج الرياضي التالي:

```
STORM
                    PROBLEM DATA IN EQUATION STYLE
Maximize
   + 2 VAR   1 + 4 VAR   2 + 3 VAR   3

Subject to

  CONSTR   1
   + 3 VAR   1 + 4 VAR   2 + 2 VAR   3 <= 60

  CONSTR   2
   + 2 VAR   1 + 1 VAR   2 + 2 VAR   3 <= 40

  CONSTR   3
   + 1 VAR   1 + 3 VAR   2 + 2 VAR   3 <= 80

              0 <= VAR   1
              0 <= VAR   2 <= 6
              0 <= VAR   3 <= 16
```

ان الحل الأمثل للمسألة هو:

X2= 20/3 ,   X3= 50/3,   MAX Z= 230/3

وهي عبارة عن أعداد غير صحيحة.

الحل بالاعداد الصحيحة *يبين:*

```
STORM
      OPTIMAL SOLUTION - SUMMARY REPORT (NONZERO VARIABLES)
                Variable            Value            Cost
        1        VAR   1            1.0000          2.0000
        2        VAR   2            6.0000          4.0000
        3        VAR   3           16.0000          3.0000

        Slack Variables
        4     CONSTR   1            1.0000          0.0000
        6     CONSTR   3           29.0000          0.0000

      Objective Function Value = 74
```

X2= 6 ,   X3= 16,   MAX Z= 74

الفصل الرابع
مسألـــة النقـــل

الفصل الرابع
مسألــــة النقــــل

تعتبر مسألة النقل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية.

وتتطلب صياغة نموذج النقل توفر البيانات الأساسية التالية :

أ / الكميات المتاحة (مستوى العرض) من المنتجات أو المواد المطلوب نقلها في كل مصدر من المصادر (مستودعات، مخازن، مصانع، وغيرها).

ب/ الكميات المطلوبة (مستوى الطلب) أي الاحتياجات حسب جهات الطلب التي تحتاج إلى تلك المنتجات أو المواد وقد تكون هذه المراكز عبارة عن مصانع، وكلاء بيع، أسواق، وغيرها.

ت/ تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل مصدر عرض إلى كل مركز طلب في حالة كون الهدف من الدراسة هو تقليل التكاليف الكلية للنقل. أما إذا كان الهدف من الدراسة هو تقليل الزمن الكلي للنقل فيجب توفير زمن نقل الوحدة الواحدة من كل مصدر من المصادر إلى كل مركز من المراكز.

النموذج الرياضي لمسألة النقل:

تكون **دالة الهدف** هي: $MINC=\sum XijCij$

الكميات المنقولة : Xij

تكلفة الوحدة الواحدة : Cij

تحت **القيود** التاليـة :

$$X_{11}+X_{12}+...+X_{1m}=b_1$$
$$X_{21}+X_{22}+...+X_{2m}=b_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{n1}+X_{n2}+...+X_{nm}=b_n$$
$$X_{11}+X_{21}+...+X_{n1}=a_1$$
$$X_{12}+X_{22}+...+X_{n2}=a_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$X_{1m} + X_{2m} + ... + X_{nm} = a_m$$

الشــرط الرئيســي هــو الشــرط الــلازم فــي هــذا الجــدول هــو أن يكــون ∃العرض ∃=الطلب

شرط عدم السلبية أي يجب أن تكون الكميات موجبة أو معدومة؛

$Xij \geq 0$

$$X_{11}, X_{12}, ..., X_{1m}, X_{21}, X_{22}, ..., X_{2m}, ..., X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{nm} \geq 0$$

وهذا النموذج يمكن ترجمته إلى الجدول التالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	…	D_m	العرض
S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	…	C_{1m}	b_1
S_2	C_{31} C_{21}	C_{22}	C_{23}	…	C_{2m}	b_2
S_3	C_{n1}	C_{32}	C_{33}	…	C_{3m}	b_3 ∑العرض
:	:	:	:	:	:	∑الطلب
S_n		C_{n2}	C_{n3}	…	C_{nm}	b_n
الطلب	a_1	a_2	a_3	…	a_m	

مثال

C : 100 كلغ

نفترض أن هذه المواد متوفرة لدى ثلاث موردين كمايلي:

I : 200

II : 50

III : 200

تكاليف نقل كل نوع حسب كل مورد كماهي موضحة في الجدول التالي:

الطلب / العرض	A	B	C
I	**1**	**2**	**4**
II	**2**	**3**	**5**
III	**6**	**4**	**3**

الهدف الذي يتم البحث عنه هو تخفيض التكاليف أي كيفية نقل المواد الثلاثة من عند الموردين بأقل التكاليف.

بالتالي تكون دالة الهدف هي: $MINC=\sum XijCij$

Xij : الكميات المنقولة

Cij : تكلفة الوحدة الواحدة

وأخيرا لدينا شرط عدم السلبية أي يجب أن تكون الكميات موجبة أو معدومة؛ $Xij \geq 0$

طرق حل مسألة النقل : هناك طرق مختلفة تعطينا الحل الأولى وهي خمسة طرق؛

1. طريقة الشمال الغربي
2. طريقة أصغر عنصر في العمود.
3. طريقة أصغر عنصر في السطر
4. طريقة أصغر عنصر في الجدول
5. طريقة الجزاء و العقاب Pénalités *

1 **طريقة الشمال الغربي:** هي أبسط الطرق حيث يتم التوزيع في الخانة التي تقع في الشمال الغربي من مصفوفة التكاليف.

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع		
العرض (1)	150	50		**200**	50	0
العرض (2)		50		**50**	0	
العرض (3)		100	100	**200**	100	0
	150	**200**	**100**	**450**		
	0	150	0	**450**		
		100				
		0				

نلاحظ أنه يتم التوزيع بالطريقة التالية: نبحث دائما على "خانة الشمال الغربي"؛ لدينا 200 وحدة في العرض و 150وحدة في الطلب. يمكن تلبية الجزء المشترك بين العرض والطلب وهو 150وحدة. نقول إذن, هذا الطلب تمت تلبيته ونكتب 0 عوضا عن 150 وتبقى 50 وحدة

في العرض. ونكرر العملية مرة أخرى. كل سطر أو عمود نجد الباقي فيه هو 0 نقوم بإلغائه. فتصبح الخانة الثانية هي خانة الشمال الغربي ونقوم بنفس الخطوات نجد الطلب 200وحدة والعرض 50وحدة، فنوزع 50وحدة وهكذا...

للتحقيق من توزيع كل كميات العرض والطلب في الحل الأولي نجد جميع المجاميع هو 0 في جميع الأسطر والأعمدة.

الحل المقبول(أساسي أو قاعدي) : لكي يكون حلا مقبولا يجب أن تتحقق العلاقة التالية:

عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المستعملة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1

في المثال السابق، عدد الخانات المملوءة=M+n-1

5 =1-3+3

إذن الحل مقبول.

حساب التكاليف : نذهب للخانات المملوءة.

$$\sum cij=150*(1)+50*(2)+50*3+100*4+100.3$$

$$\sum cij = 150+100+150+400+300=1100DA$$

شرح الحل :

المورد الأول لديه 200وحدة يلبي طلب1 بـ 150وحدة و 50 وحدة في الطلب الثاني.

المورد الثاني لديه 50وحدة سيلبي الطلب الثاني المقدر بـ 50وحدة.

المورد الثالث لديه 200وحدة سيلبي الطلب الثاني بـ 100وحدة والطلب الثالث بـ 100وحدة.

عيوب هذه الطريقة : ما يعاب على هذه الطريقة هو أنها لا تأخذ بعين الإعتبار التكاليف بينما دالة الهدف تركز على التكاليف Cij.

2_ طريقة أصغر عنصر في العمود:

يتم التوزيع في هذه الطريقة في العمود الأول ثم الثاني...الخ. أي نبحث عن أصغر تكلفة في هذا العمود نجد **1** ويتم التوزيع والباقي 0، نلغي العمود ونبحث عن أصغر تكلفة في العمود الثاني هي **2**إذن يبقى في الطلب 150 والباقي في العرض هو0. نبحث عن أصغر تكلفة هي**3.** إذن نلغي السطر **II**، ثم توزع الكمية في خانة التكلفة **4** وهكذا.

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع
العرض (1)	1 **150**	2 **50**	4	**200**
العرض (2)	2	3 **50**	5	**50**
العرض (3)	6	4 **100**	3 **100**	**200**
	150	**200**	**100**	**450** / **450**

قبولية الحل:

الحل مقبول لأن عدد الخانات المملوءة هو 3 + 3 – 1 = **5**

حساب التكاليف: $\Sigma cij = 1100DA$

3- طريقة أصغر عنصر في السطر :

نفس الطريقة السابقة لها لكن هنا نستعمل الأسطر أي يتم التوزيع في الأسطر 1 ثم 2 ...الخ. ثم نحسب التكاليف.

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع
العرض (1)	1 **150**	2 **50**	4	**200**
العرض (2)	2	3 **50**	5	**50**

العرض (3)	6	4 **100**	3 **100**	**200**
	150	**200**	**100**	**450**

$$\Sigma cij = 1100 DA$$

4 طريقة أصغر عنصر في الجدول :ننظر لجميع الأسطر والأعمدة ونبحث عن أقل تكلفة.

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع
العرض (1)	1 **150**	2 **50**	4	**200**
العرض (2)	2	3 **50**	5	**50**
العرض (3)	6	4 **100**	3 **100**	**200**
	150	**200**	**100**	**450**

$$\Sigma cij = 1100 DA$$

مثال 2:

نريد نقل مادة أولية من الأماكن A.B.C.D إلى الأماكن b1. b2.b3 للكميات المتوفرة هي :

1. من A=217وحدة، من B =322 وحدة، من C=614 وحدة، من D =237 وحدة. حاجة P1=620 وحدة، P2=403 وحدة، P3=367 وحدة.
2. تكاليف هذا النقل:

- من : A→P1=6، A→P2 = 9، A→P3= 4
- من : B→P1= 3، B→P2=6، B→ P3=3
- من : C →P1= 4، C→ P2= 6، C→P3= 5

- من : P1→ D= 9، P2→ D= 9، P3→ D= 9

المطلوب: حدد الحل الأولي بطريقة أدنى عنصر في الجدول ، ثم بين إذا كان الحل قاعدي أم لا .

الحل:

	P1	P2	P 3	
A	6	9	4 217	217 0
B C	3 322	6 166	3	322 0
D	4 298	6	5 150	614 316
الحل قاعدي لأن:	9	9 237	9	237 0
M+n -1=4+3-1=6	620 298 0	403 237 0	367 150 0	

5 طريقة الجزاء والعقاب : تعتبر أحسن طريقة تعطينا الحل الأولي.

يتم الحل بالخطوات التالية:

حساب مايدعي بالغرامات : وهي الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود.

_ ***نختار أكبر غرامة :*** في مثالنا اخترنا في المرة الأولى أكبر غرامة متمثلة في 1 ثم اخترنا أقل تكلفة وهي 1، وتم توزيع القيمة 150، بالتالي تم إلغاء العمود الأول مما يستدعي حساب الغرامات مرة أخرى. ثم نكرر الخطوات السابقة إلى أن نتحصل على الجدول التالي.

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع
العرض (1)	1 150	2 50	4	200 1 2
العرض (2)	2	3 50	5	50 1 2 2
العرض (3)	6	4 100	3 100	200 1 1 1

150 1	200 1 1	100 1 2	450 450

الحل قاعدي لأن: **M+n -1= 3+3-1=5**

التكلفة الإجمالية هي: $\Sigma cij = 1100DA$

أمثلية الحل وعملية التحسين:

إن الطرق المذكورة أعلاه تعطينا الحل الأولي فقط. فقد يكون هذا الحل حلا أمثلا أو غير أمثل مما يستدعي عملية التحسين. تمر عملية التحسين بعدة خطوات، نفضل توضيحها من خلال أمثلة حتى يستطيع القارئ استيعابها. مع الملاحظة أن مراحل التحسين قد تكون قليلة في بعض الأمثلة، والعكس صحيح حيث نبقى في إجراء عمليات التحسين للعديد من المرات. مع الإشارة في الأخير إلى أن البرمجيات المتوفرة قد سهلت كثيرا هذه العمليات من حيث الجهد المبذول والوقت المستغرق.

مثال: يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق دقلة نور انطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية إلى أربعة دول حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

- ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي: 400 طن.
- ميناء وهران: الكميات الممكن تصديرها عبره هي: 300 طن.
- ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي: 200 طن.

أما الكميات المطلوبة لكل دولة فهي:

- الولايات المتحدة الأمريكية: حجم الطلب هو 125 طن.
- كندا: حجم الطلب هو 214 طن.
- أستراليا: حجم الطلب هو302 طن.
- حجم الطلب هو 259 طن.

تكلفة نقل القنطار الواحد من التمور بالدولار الأمريكي من كل ميناء إلى كل دولة مستوردة موضحة في الجدول التالي:

مصدر / منتج	الولايات المتحدة الأمريكية	كندا	أستراليا	فرنسا
ميناء الجزائر	9	4	8	2
ميناء وهران	7	9	6	3
ميناء عنابة	5	6	7	4

إذا كان الديوان هو الذي يتولى نقل المنتوج إلى الدول المستوردة وهدفه هو تصدير منتوجاته بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب:

أ- أكتب النموذج الرياضي للمسألة.

ب- أوجد الحل الأساسي باستعمال:1/ طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2/ طريقة التكلفة الدنيا.

ت- أحسب التكلفة الإجمالية عند كل حل.

ث- انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه، أوجد الحل الأمثل .

الحل:

أ- كتابة النموذج الرياضي:

- دالة الهدف:

$$Min\ (c)= 9x_{11}+ 4x_{12}+ 8x_{13}+ 2x_{14}+ 7x_{21}+ 4x_{22}+6x_{23}+ 3x_{24}+ 5x_{31}+ 6x_{32}+ 7x_{33}+ 4x_{34}$$

- قيود الطلب:

الطلب (1): $x_{11}+x_{21}+ x_{31}=125$

الطلب (2): $x_{12}+x_{22}+x_{32}=214$

الطلب (3): $x_{13}+x_{23}+x_{33}=302$

الطلب (4): $x_{14}+x_{24}+x_{34}=259$

- قيود العرض:

العرض(1): $x_{11}+ x_{12}+ x_{13}+ x_{14}=400$

العرض(2): $x_{21}+ x_{22}+x_{23}+ x_{24}=300$

العرض(3): 200 $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200$

شرط الحل:

$$\sum_{i=1}^{n} Si = \sum_{j=1}^{n} dj \Rightarrow 900 = 900$$

مجموع الطلب = مجموع العرض

شرط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

ب- إيجاد الحل الأساسي:

1/ باستعمال طريقة الشمال الغربي:

مصدر / منتج	الولايات لمتحدة الأمريكية	كندا	أستراليا	فرنسا	
ميناء الجزائر	9 **125**	4 **214**	8 **61**	2	**400**
ميناء وهران	7	9	6 **241**	3 **59**	**300**
ميناء عنابة	5	6	7	4 **200**	**200**
	125	**214**	**302**	**259**	**900** / **900**

مجموع الخانات: $n+m-1=4+3-1=6$.

ومنه الحل قاعدي.

حساب التكلفة الإجمالية:

C=125*9+214*4+61*8+241*6+59*3+200*4=4892

2) باستعمال التكلفة الدنيا:

مصدر / منتج	الولايات لمتحدة الأمريكية	كندا	أستراليا	فرنسا	
الجزائر	9	4 **141**	8	2 **259**	400 141 0
وهران	7	9	6 **300**	3	300 0
عنابة	5 **125**	6 **73**	7 **2**	4	75 2 0 200
	125 0	214 73 0	302 2 0	259 0	900 900

حساب التكلفة الإجمالية:

$$C= (141*4) +(259*2)+(300*6)+(125*5)+(73*6)+(2*7)$$

$$C= 3667$$

ث- إيجاد الحل الأمثل: (نستعمل حل طريقة الشمال الغربي)

نضيف سطر وعمود في الجدول، نسبق كل التكاليف بإشارة ناقص؛

$\forall\ x\ \ i\,j \geq 0,\ I_I + J_J= C\ I\ J$ $\qquad I_1= 0$

J / I	J_1=-9	J_2=-4	J_3=-8	J_4=-5
I_1=0	-9 **125** 0	-4 **214** 0	-8 **61** 0	-2 -3
I_2=2	-7 0	-9 7	-6 **241** 0	-3 **59** 0
I_3=1	-5 -3	-6 3	-7 0	-4 **200** 0

حساب قيم I و J:

(1.1) ⟶ $I_I+ J_J = C\ I\ J \Leftrightarrow I_1+ J_1 = C_{11} = -9 \Rightarrow 0 + J_1= -9$

$= J_1 = -9$

(1.2) → $I_I + J_J = C\,I\,J \Leftrightarrow I_1 + J_2 = C_{12} = -4 \Rightarrow 0 + J_2 = -4$

$= J_2 = -4$

(1.3) → $I_I + J_J = C\,I\,J \Leftrightarrow I_1 + J_3 = C_{13} = -8 \Rightarrow 0 + J_3 = -8$

$= J_3 = -8$

(2.3) → $I_I + J_J = C\,I\,J \Leftrightarrow I_2 + J_3 = C_{23} = -6$

$\Leftrightarrow I_2 - 8 = -6 \Leftrightarrow I_2 = -6 + 8 = 2$

$\Leftrightarrow I_2 = 2$

(2.4) → $I_I + J_J = C\,I\,J \Leftrightarrow I_2 + J_4 = C_{24} = -3$

$\Leftrightarrow 2 + J_4 = -3$

$\Leftrightarrow J_4 = -3 - 2$

$\Leftrightarrow J_4 = -5$

(3.4) → $I_I + J_J = C\,I\,J \Leftrightarrow I_3 + J_4 = C_{34} = -4$

$\Leftrightarrow I_3 - 5 = -4$

$\Leftrightarrow I_3 = -4 + 5 = 1$

$\Leftrightarrow I_3 = 1$

حساب قيم E i j :

$\forall \quad x\,I\,J\,,\ E\,I\,J = I_I + J_J - C\,I\,J$

$E_{11} = I_1 + J_1 - C_{11} = 0 - 6 + 6 = 0$

$E_{12} = I_1 + J_2 - C_{12} = 0 - 4 + 4 = 0$

$E_{13} = I_1 + J_3 - C_{13} = 0 - 8 + 8 = 0$

$E_{23} = I_2 + J_3 - C_{23} = 2 - 8 + 6 = 0$

$E_{24} = I_2 + J_4 - C_{24} = 2 - 5 + 3 = 0$

$E_{34} = I_3 + J_4 - C_{34} = 1 - 5 + 4 = 0$

ملاحظة:

*إذا كانت كل قيم $E\,i\,j \geq 0$ فإن الحل أمثل، أما إذا كانت هناك على الأقل قيمه سالبة فالحل ليس بالحل الأمثل ويجب تحسينه.

كيفية تحسين الحل:

*كما رأينا في المثال السابق أن $(E_{14} = -3)$ لذلك يجب تحسين الحل وذلك بإضافة Δ في الخانة التي يوجد بها الاقتصاد سالب.

*إذا تكررت هذه القيمة نختار الخانة التي تضمن أدنى تكلفة. لاحظ في هذا المثال أن هذه القيمة متواجدة بخانتين فنختار إحداهما عشوائيا.

*نحافظ على توازن السطر ثم العمود ثم الجدول.

*يضاف Δ في الخانة المملوءة فقط.

كيفية تحديد قيمة Δ: تحدد قيمة Δ بالعلاقة:

$$\Delta = \min \{ x\,I\,J - \Delta \}$$

في الخانة الرابعة من السطر الاول(14) يمكن تخفيف التكاليف لأن الاقتصاد سالب أي لو تنقص وحدة واحدة فإن التكاليف تنخفض بـ 3 وحدات.

I \ J	J_1=-9	J_2=-4	J_3=-8	J_4=-5
I_1=0	-9 **125** 0	-4 **214** 0	-8 **61 - Δ** 0	-2 **Δ** -3
I_2=2	-7 0	-9 7	-6 **241+Δ** 0	-3 **59- Δ** 0
I_3=1	-5 -3	-6 3	-7 0	-4 **200** 0

والآن نحدد قيمة Δ وذلك بالعلاقة التالية:

$$\Delta = \min \{ x_{ij} - \Delta \}$$

$$\Delta = \min \begin{cases} 61-\Delta \\ \end{cases}$$

59 - Δ

59 = Δ

نكتب الحل الجديد بتعويض قيمة Δ في الجدول ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-9$	$J_2=-4$	$J_3=-8$	$J_4=-2$
$I_1=0$	-9 **Δ - 125** 0	-4 **214** 0	-8 **2** 0	-2 **59+ Δ** -3
$I_2=2$	-7 0	-9 2	-6 **300** 0	-3 3
$I_3=-2$	-5 **Δ** 6 -	-6 0	-7 3 -	-4 **Δ- 200** 0

<u>حساب القيم الجديدة ل Iو,J:</u>

$I_I + J_1 = C_{11} \Rightarrow 0+ J_1= -9 \Rightarrow J_1= -9$

$I_1 +J_2 = C_{12} \Rightarrow 0+ J_2 = -4 \Rightarrow J_2 = -4$

$I_1 +J_3 = C_{13} \Rightarrow 0+ J_3 = -8 \Rightarrow J_3 = -8$

$I_1+ J_4 = C_{14} \Rightarrow 0+ J_4 = -2 \Rightarrow J_4 = -2$

$I_2 +J_3 = C_{23} \Rightarrow I_2 -8 = -6 \Rightarrow I_2 = -6+8 =2$

$I_3 +J_4 = C_{34} \Rightarrow I_3 - 2 = -4 \Rightarrow I_3 = -4 + 2= 2-$

$$\Delta=\min \begin{cases} 200- \Delta \\ 125 -\Delta \end{cases}$$

$\Delta=125$

$C=4715$

يصبح الحل الجديد هو:

J / I	$J_1=-3$	$J_2=-4$	$J_3=-8$	$J_4=-2$
$I_1=0$	-9 6	-4 **214** 0	-8 **2- Δ** 0	-2 **184+ Δ** -3
$I_2=-2$	-7 6	-4 2	-6 **300** 0	-3 3
$I_3=-2$	-5 **125** 0	-6 0	-7 **Δ** -3	-4 **Δ– 75** 0

حساب القيم الجديدة لـJ و I:

$I_1 + J_2 = C_{12} \Rightarrow 0 + J_2 = -4 \Rightarrow J_2 = -4$

$I_1 + J_3 = C_{13} \Rightarrow 0 + J_3 = -8 \Rightarrow J_3 = -8$

$I_1 + J_4 = C_{14} \Rightarrow 0 + J_4 = -4 \Rightarrow J_4 = -4$

$I_2 + J_3 = C_{23} \Rightarrow I_2 - 8 = -6 \Rightarrow I_2 = 2$

$I_3 + J_1 = C_{31} = ?$

$I_3 + J_4 = C_{34} \Rightarrow I_3 - 4 = -4 \Rightarrow I_3 = 0$

$I_3 + J_1 = C_{31} \Rightarrow 0 + J_1 = -5 \Rightarrow J_1 = -5$

$C=3965$

$$\Delta = \min \begin{cases} \Delta - 75 \\ \Delta - 2 \end{cases}$$

$\Delta=2$

يصبح الحل الجديد هو:

J / I	J_1=-3	J_2=-4	J_3=-5	J_4=-2
I_1=0	-9 6	-4 **214** 0	-8 3	-2 **186** 0
I_2=-1	-7 4	-9 4	-6 **300** 0	-3 0
I_3=-2	-5 **125** 0	-6 0	-7 **2** -3	-4 **73** 0

حساب القيم الجديدة لـJ

$I_1 + J_2 = C_{12} \Rightarrow 0 + J_2 = -4 \Rightarrow J_2 = -4$

$I_1 + J_4 = C_{14} \Rightarrow 0 + J_4 = -4 \Rightarrow J_4 = -4$

$I_2 + J_3 = C_{23} \Rightarrow I_2 - 7 = -6 \Rightarrow I_2 = 1$

$I_3 + J_1 = 0 + J_1 = -5 \Rightarrow J_1 = -5$

$I_3 + J_3 = 0 + J_3 = -7 \Rightarrow J_3 = -7$

$I_3 + J_4 = I_3 - 4 = -4 \Rightarrow I_3 = 0$

بما أن الاقتصاد بأكمله موجب، أي $E\ x \geq 0$ فالحل إذن أمثل.

$\Leftarrow$ لا يمكن اجراء تخفيض للتكاليف لأن الاقتصاد ليس سالب ومنه توزع الكميات كما يلي:

- من ميناء الجزائر: الكميات هي: 214 إلى كندا و 186 إلى فرنسا.
- من ميناء وهران: الكميات هي: 300 إلى أستراليا.
- من ميناء عنابة: الكميات هي: 214 إلى الولايات المتحدة الأمريكية، 2 إلى أستراليا و 73 إلى فرنسا.

الحالات الخاصة في مسألة النقل

الفرق بين العرض والطلب:

تريد مؤسسة توزيع الكميات المتوفرة من المادة M على الوحدات الإنتاجية الأربعة:A4,A3, A2, A1 تتوفر هذه الكميات كما يلي: وكذلك الحاجات الوحدات 1، 2، 3، 4 على الترتيب:

المورد 1 ـــ 240 طن حاجة الوحدة الأولى ـــ 213 طن

المورد2 ـــ 120طن حاجة الوحدة الثانية ـــ 104 طن

المورد3 ـــ 100 طن حاجة الوحدة الثالثة ـــ 106 طن

المورد4 ـــ 40 طن حاجة الوحدة الرابعة ـــ 211 طن

أما عن تكاليف النقل من المورد إلى الوحدة فهي كالآتي:

المورد1 إلى الوحدة 1 ـ4. المورد 2 الوحدة ـ3. المورد 3إلى الوحدة1-8. المورد 4 الوحدة 1-9

الوحدة 2 ـ6 الوحدة 2 ـ5 الوحدة 2 ـ5 الوحدة 2 ـ9

الوحدة 3 ـ4 الوحدة 3 ـ7 الوحدة 3 ـ9 الوحدة 3 ـ6

الوحدة 4 ـ2 الوحدة 4 ـ6 الوحدة 4 ـ6 الوحدة 4 ـ5

المطلوب: ما هي خطة النقل المثلى؟

الحل: الطلب > العرض ـــ نضيف سطر المورد الوهمي بكمية(134 طن)بتكلفة "0"

باستخدام طريقة الشمال الغربي:

طلب / عرض	A1	A2	A3	A4	
M1	4 213	6 27	4	2	240
M2	3	5 77	7 43	6	120
M3	8	5	9 63	6 37	100
M4	9	9	6	5 40	40

X	0	0	0	0 134	134
	213	104	106	211	634 634

التكلفة C1=2689

عدد الخانات المملوءة= 8 = n+m-1

رقابة الحل: حسب: $\forall x_{ij} \geq 0, \quad I_1 + J_j = C_{ij}$

الاقتصاد في التكلفة: $\forall x_{ij} \geq 0, e_{ij} = \quad I_{1i} + J_j - C_{ij}$

$\Delta = \min \{s_{1ij} - \Delta\}$

$\Delta = 27$

J \ I	4	-6	-8	5-
0	-4 213 0	6- 27-Δ 2	-4 Δ 4-	-2 -3
1	-3 0	-5 77+Δ 0	-7 43-Δ 0	-6 2
-1	-8 3	-5 2-	-9 63 0	-6 37 0
0	-9 5	-9 3	-6 -2	-5 40 0
5-	0 1-	0 1-	0 3-	0 134 0

C2=2581

Δ=40

J \ I	-4	-2	-4	-1
0	-4 213-Δ 0	6- 4	-4 27+Δ 0	-2 1
-3	-3 Δ -4	-5 104 0	-7 16- Δ 0	-6 2
-5	-8 1-	-5 2-	-9 63 0	-6 37 0
-4	-9	-9	-6	-5 40

	1	-1	-2	0
1	0 -3	0 -5	0 -3	0 134 0

C3=2517

Δ=16

J \ I	-4	6-	-4	-1
0	-4 197-Δ 0	6- 0	-4 43+Δ 0	-2 1
1	-3 16+Δ 0	-5 104-Δ 0	-7 40	-6 6
-5	-8 1-	-5 Δ 6-	-9 63-Δ 0	-6 37 0
-4	-9 1	-9 -1	-6 -2	-5 40 0
1	0 -3	0 -5	0 -3	0 134 0

C4=2304 , Δ=63

J \ I	-4	-6	-4	-75-
0	-4 134-Δ 0	6- 0	-4 106 0	-2 Δ -5
1	-3 134+Δ -4	-5 41-Δ 0	-7 4	-6 0
1	-8 5	-5 63+Δ 0	-9 6	-6 37-Δ 0
2	-9 7	-9 5	-6 4	-5 40 0
7	0 3	0 1	0 3	0 134 0

C5=1954 , Δ=37

J \ I	-4	-6	-4	-2

0	-4 97-Δ 0	6- 0	-4 106 0	-2 37+Δ 0
1	-3 116+Δ 0	-5 4-Δ 0	-7 4	-6 5
1	-8 5	-5 106 0	-9 6	-6 5
-3	-9 2	-9 0	-6 -1	-5 40 0
2	0 -2	0 Δ -4	0 -2	0 Δ-134 0

C6=1938 , Δ=4

J / I	-4	-6	-4	-7-2
0	-4 93-Δ 0	6- 4	-4 106 0	-2 41+Δ 0
1	-3 126 0	-5 4	-7 4	-6 1
1	-8 1	-5 100 0	-9 2	-6 1
-3	-9 2	-9 4	-6 -1	-5 40 0
2	0 Δ -2	0 4 0	0 -2	0 130-Δ 0

C7=1752

Δ=93

J / I	-2	-2	-4	-2
0	-4 2+	6- 4	-4 106-Δ 0	-2 134+Δ 0
1-	-3 126 0	-5 2	-7 2	-6 3
3-	-8 3	-5 100 0	-9 2	-6 1
-3	-9 4	-9 4	-6 -1	-5 40 0
2	0 93 0	0 4 0	0 Δ -2	0 37-Δ 0

C8=1678

Δ=37

J / I	-4	-4	-4	-2
0	-4 0	6- 2	-4 69-Δ 0	-2 171+Δ 0
1	-3 126 0	-5 2	-7 8	-6 5
1-	-8 3	-5 100 0	-9 4	-6 3
-3	-9 2	-9 2	-6 Δ -1	-5 40-Δ 0
4	0 93 0	0 4 0	0 37 0	0 02

C9=1638

Δ=40

J / I	-4	-4	-4	2-
0	-4 0	6- 2	-5 29 0	-2 211 0
1	-3 120	-5 2	-7 4	-6 5
-1	-8 3	-5 100 0	-9 4	-6 3
-2	-9 3	-9 3	-6 40 0	-5 1
4+	0 93 0	0 4 0	0 37 0	0 2

$$E_{ij} \geq 0$$

الحل أمثل.

شرح الحل:

- يقوم المورد الأول بتلبية طلب الزبون الثالث بمقدار 29 وحدة وطلب الزبون الرابع بـ 211 وحدة.
- يقوم المورد الثاني بتلبية طلب الزبون الاول بمقدار 120 وحدة.
- يقوم المورد الثالث بتلبية طلب الزبون الثاني بمقدار 100 وحدة.

- يقوم المورد الرابع بتلبية طلب الزبون الثالث بمقدار 40 وحدة.
- لا يمكن تلبية طلب الزبون الأول بمقدار 93 وحدة، ولا طلب الزبون الثاني بـ 4 وحدة ولا طلب الزبون الثالث بـ 37 وحدة .

حالة الانتاج والتخزين:

يتم طلب سلعة موسمية خلال الأربع (4) شهور من كل سنة هي جانفي، فيفري، مارس وأفريل بالكميات: 19،15،20 و24 آلاف وحدة على الترتيب.هناك منتج لهذه السلعة ينتجها بمعدل 17 آلاف وحدة شهريا في الوقت الرسمي، ويمكنه إنتاج خمس (5) آلاف وحدات أخرى في كل شهر في الوقت الإضافي، علما أن وحدة الوقت الرسمي تكلف 400 دج وفي الوقت الإضافي تكلف 600 دج . وقدرت تكلفة تخزين الوحدة بـ 50دج شهريا. المطلوب: كيفية تخطيط الإنتاج خلال الأشهر الأربعة حتى تكون التكلفة في حدها الأدنى.

الأشهر / منتج	جانفي	فيفري	مارس	أفريل		
جانفي	400 **17**	450	500	550	0	**17**
	600 **2**	650	700	750	**0** **3**	**5**
فيفري		400 **15**	450 **2**	500	**0**	**17**
		600	650	700	**0** **5**	**5**
مارس			400 **17**	450	**0**	**17**
			600 **1**	650 **2**	**0** **2**	**5**
أفريل				400 **17**	**0**	**17**
				600 **5**	**0**	**5**
	19	**15**	**20**	**24**	**10**	88 **88**

حالة مسألة النقل بمراحل متعددة:

في بعض الحالات لا تكون مسألة النقل مسألة بسيطة وإنما مكونة من مجموعة مراحل، بحيث يتم النقل في مرحلة أولى وعلى أساس نتائجها يتم تكوين المسالة الثانية.

مثال:

تقوم شركة (س) بتلبية طلبيات زبائنها بعد أن يتم نقل البضاعة من الوحدات الإنتاجية إلى مخزنين ثم إلى الزبائن. تقدر الطاقات الإنتاجية للوحدات بـ1000،1500 و1200على التوالي. أما طاقة المخزنين

فهي 2000 لكل منهما. كما أن احتياجات الزبائن فهي:650, 800,500,750,1000 وحدات بالترتيب.

التكاليف المتعلقة بنقل البضائع من الوحدات الإنتاجية إلى المخازن ثم إلى الزبائن موضحة في الجداول.

أوجد الحل الأمثل الذي يحقق تكاليف نقل البضائع من الوحدات الإنتاجية إلى الزبائن.

حل المثال:

المرحلة الأولى: مرحلة نقل البضاعة من الوحدات الإنتاجية إلى المخزنين

		مخزن 1	مخزن 2	المجموع
	J / I	J_1=-5	J_2=-3	
وحدة 1	I_1=0	-1 **1000** 0	-4	**1000**
وحدة 2	I_2=-1	3- **1000** 0	-6 **500** 0	**1500**
وحدة 3	I_3=3	-6	-8 **1200** 0	**1200**
العرض الوهمي		0	0 **300** 0	**300**
المجموع		**2000**	**2000**	**4000**

لاحظ من خلال الحل أن ماهو متوفر فعلا في المخزن الثاني هو (500+1200)وحدة فقط أي 1700 وحدة والتي على أساسها نقوم ببناء المسألة الثانية.

المرحلة الثانية: مرحلة نقل البضاعة من المخزنين إلى الزبائن.

		زبون 1	زبون 2	زبون 3	زبون 4	زبون 5	المجموع
	J / I	$J_1=-5$	$J_2=-7$	$J_3=-8$	$J_4=-7$	$J_5=-4$	
المخزن1	$I_1=0$	-6	-7 **500** 0	-8 **750** 0	-7 **100** 0	4- **650** 0	**2000**
المخزن2	$I_2=2$	-3 **800** 0	-5 0	-8 0	-5 **900** 0		**1700**
المجموع		**800**	**500**	**750**	**1000**	**650**	**3700**

حالة الحل البديل

نقول أنه لدينا حلا بديلا إذا كانت لدينا خانة فارغة لكن قيمة الاقتصاد في النفقة الخاص بها عبارة عن صفر.

يتم الحصول على هذا الحل البديل إذا ما قمنا بتكوين مسار مغلق انطلاقا من هذه الخانة الفارغة. للإشارة هذه العملية ليست بمثابة عملية تحسين طالما أننا سنجد نفس قيمة دالة الهدف.

مثال: ليكن لدينا الحل النهائي لإحدى مسائل النقل؛

J / I	$J_1=-2$	$J_2=1$	$J_3=0$	$J_4=-1$	
$I_1=1$	1- **1000** 0	-7 9	-3 4	5- 5	1000
$I_2=0$	2- **500** 0	-3 4	-4 4	1- **300** 0	800
$I_3=-3$	7- 2	2- **1200 +Δ** 0	5- 2	4- **800- Δ** 0	2000
$I_3=-2$	-6 2	-1 **800 -Δ** 0	-2 **750** 0	-3 **Δ** 0	1550

	1500	2000	750	1100	

C=10200

لاحظ أن الخانة الأخيرة للتوزيع هي خانة فارغة لكن قيمة الاقتصاد في النفقة الخاص بها عبارة عن صفر. نضع فيها قيمة (Δ) وقيمتها هي 800، فنحصل على الحل البديل.

1- **1000** 0	-7 9	-3 4	5- 5	1000
2- **500** 0	-3 4	-4 4	1- **300** 0	800
7- 2	2- **2000** 0	5- 2	4- 0	2000
-6 2	-1 0	-2 **750** 0	-3 **800** 0	1550
1500	2000	750	1100	

C=10200

لاحظ أن التوزيع هو عبارة عن توزيع جديد بشكل مختلف لكن بنفس التكلفة.(C=10200).

حالة عدم الانتظام:

لما يتم التوزيع في بعض الحالات، نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة هو أقل من (n+m-1)، وبالتالي فالحل ليس مقبولا.(لاحظ المثال التالي الذي تم حله بطريقة الشمال الغربي)

	الطلب (1)	الطلب (2)	الطلب (3)	المجموع

العرض (1)	1 **150**	2	4	**150** 0
العرض (2)	2	3 **50**	5	**50** 0
العرض (3)	6	4 **150**	3 **50**	**200** 50 0
	150 0	**200** 150 0	**50** 0	**450** **450**

(مجموع الخانات المملوءة أقل من 5=3+3-1=n+m-1)

في هذه الحالة يتم إضافة قيمة (ε) بحيث تملأ الشروط التالية:

أن تسمح بحساب قيم (ε) وتكون في الخانة ذات أقل تكلفة ولا تكون مسارا مغلقا مع بقية القيم.

حالة الطرق الممنوعة:

ما هو التوزيع الأمثل في حالة ما إذا علمت أن المورد (F_2) لا يمكنه تزويد المستهلك (B) نظرا لأن نوعية المادة المتوفرة عند هذا المورد لا تخضع للمواصفات التي يشترطها هذا المستهلك.

سوف يتم التوزيع باستعمال طريقة أدنى تكلفة في الجدول كما يلي:

جدول التوزيع في حالة الطرق المنوعة:

		A	B	C	
	J / I	$J_1 = 0$	$J_2 = -1$	$J_3 = 0$	
F1	$I_1=0$	-2 200-Δ 0	3- 80+ Δ	5- 0	280
F2	$I_2=-4$	-3 1-	∝	-4 300 0	300
F3	$I_3=2$	-5 2	-14 170-Δ 0	-3 60+ Δ 0	230
F4	$I_4=-8$	-45 +Δ	-6 250	-8 190-Δ	190

		2	-3	0	
		200	250	550	1000 1000

TC=4220
Δ=170

J / I	$J_1=0$	$J_2=-1$	$J_3=0$	
$I_1=6$	-2 30-Δ 0	3- 250 0	5- Δ -1	280
$I_2=-4$	-3 3	∝	-4 30 0	300
$I_3=-3$	-5 6	-4 230 0	-3 230 0	230
$I_4=-8$	-4 170+Δ 0	-6 -3	-8 20-Δ 0	190

TC=3540
Δ=20

J / I	$J_1=+3$	$J_2=+2$	$J_3=0$	
$I_1=-6$	-2 10 0	3- 0	5- 20 0	280
$I_2=-4$	-3 2	∝	3- 230 0	300
$I_3=-3$	-5 5	-4 3	-3 1	230
$I_4=-$	-4 190 0	-6 1	8- 1	190

تمارين محلولة في مسألة النقل

المثال 1:

تريد المؤسسة m نقل الكميات المتوفرة من المادة الأولية m والمتواجدة بميناء الجزائر و ميناء وهران و ميناء سكيكدة تريد المؤسسة نقلها إلى وحداتها الإنتاجية بسطيف، بسكرة، باتنة، تيارت.

حاجة الوحدات (طن)	الولايات	الكميات المتوفرة (طن)	الولايات
110	سطيف	720	الجزائر
213	بسكرة	240	وهران
412	باتنة	140	سكيكدة
365	تيارت		
1100	/	1100	المجموع

أما تكاليف النقل فهي كالتالي :

من الجزائر إلى سطيف :130 دج . من الجزائر إلى بسكرة : 444 دج . من الجزائر إلى باتنة : 404 دج. من الجزائر إلى تيارت : 280 دج . من وهران إلى سطيف : 810 دج. من وهران إلى بسكرة : 802 دج من وهران إلى باتنة : 907 دج . من وهران إلى تيارت : 95 دج . من سكيكدة إلى سطيف :86 دج. من سكيكدة إلى بسكرة : 112 دج . من سكيكدة إلى باتنة :90 دج .من سكيكدة إلى تيارت : 190 دج .

المطلوب: استخدام طريقة شمال غربي لإيجاد الحل وحساب التكلفة، ثم بين أن الحل قاعدي أم لا

الحل:

سطيف　　تيارت　　باتنة　　بسكرة

الجزائر	130 110	444 213	404 397	280	720　610　397　0
وهران	810	802	907 15	95 225	240　225　0
سكيكدة	86	112	90	190 140	140　0
	110 0	213 0	412 15 0	365 140 0	1100 1100

أما التكاليف الكلية تحسب كالآتي :

Z = (110 * 130) + (444* 213) + (397 * 404) + (15* 907) + (225 * 95)+ (140 *190) = 330840

الحل قاعدي لأن:**M+n-1=3+4-1=06**

مثال 2:

لدينا 3 مترشحين قي حملة انتخابية، تسير هذه الحملة وفق لـ 4 مناطق: شمال، جنوب، شرق، غرب، حيث أن ميزانية:

المترشح (1) هي 300.000 دج.

المترشح (2) هي 500.000 دج.

المترشح (3) هي 600.000 دج.

بينت التقارير الدراسية أن:

المنطقة (1) تحتاج 250.000 دج.

المنطقة (2) تحتاج 450.000 دج.

المنطقة (3) تحتاج 200.000 دج.

المنطقة (4) تحتاج 500.000 دج.

إذا علمت أن تكاليف كل صوت في كل منطقة حددت كمايلي:

	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)
المترشح (1)	5	3	2	3
المترشح (2)	8	4	6	5
المترشح (3)	2	1	2	1

المطلوب:

1/ كيف سيتم توزيع ميزانية المترشحين على مختلف المناطق حيث تكون التكاليف في حدها الأدنى بحيث تكون الطريقة هي الشمال الغربي؟

2/ بسبب الأزمة المالية العالمية فإن المترشح رقم 2 خسر أمواله. كيف سيتم توزيع هذه الميزانية للمترشحين؟

3/ قام أحد أصدقاء المترشح رقم 2 بتوفير كمية العجز والمقدرة بـ 300.000 دج إلا أنه بسبب الاضطرابات الجوية الحاصلة في الشرق (المنطقة (3)) لا يمكن للمترشح الأول التنقل إليها. كيف سيتم توزيع ميزانية المترشحين من جديد؟

حل التمرين:

1) إيجاد الحل الأمثل لتوزيع ميزانية المترشحين:

	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)			
المترشح (1)	250	50			300	50	0
المترشح (2)		400	100		500	100	0
المترشح (3)			100	500	600	500	0
	250	450	200	500			
	0	400	100	0			
		0	0				

مجموع الخانات $n+m-1=4+3-1=6$، ومنه الحل قاعدي.

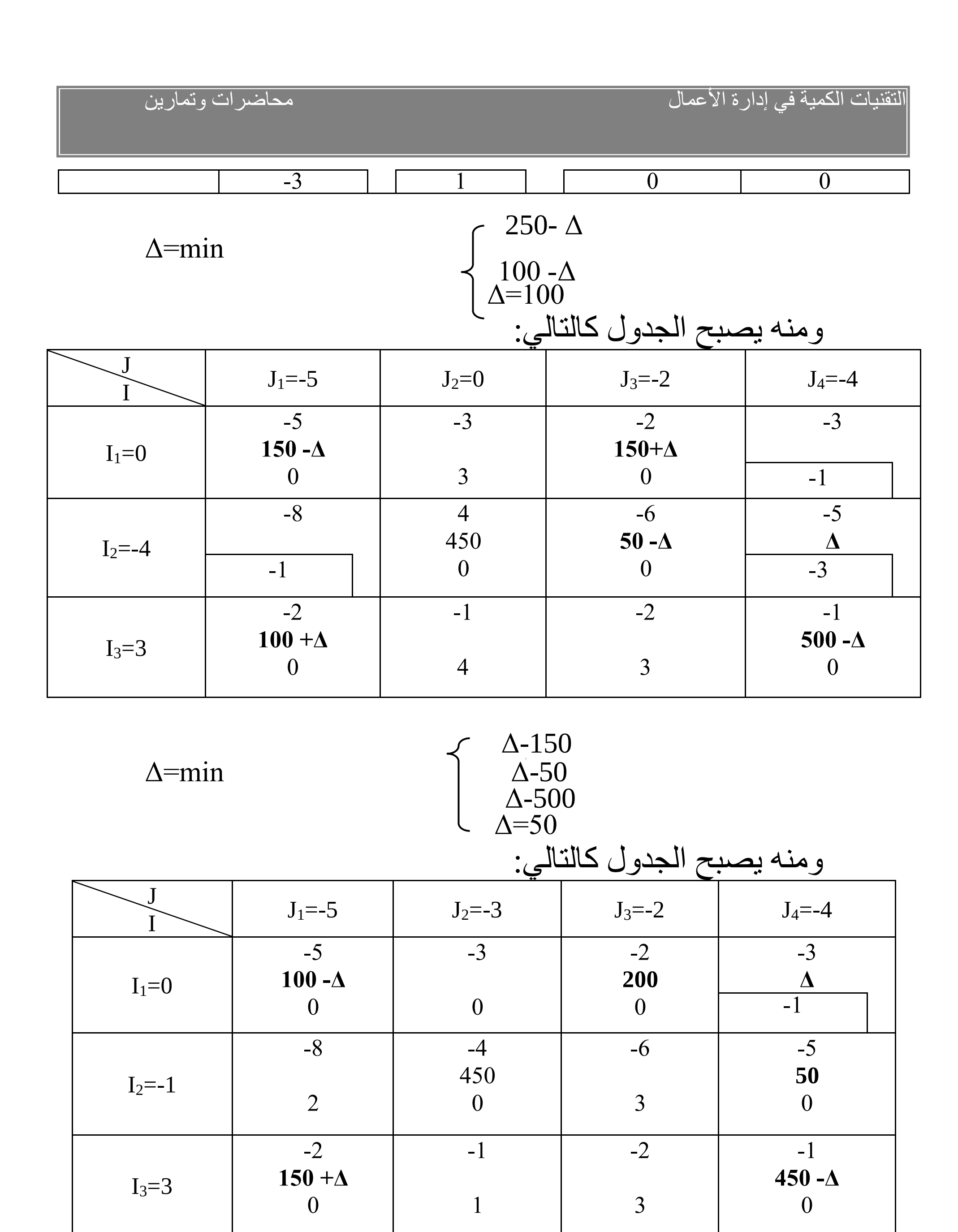
J / I	$J_1=-5$	$J_2=-3$	$J_3=-5$	$J_4=-4$
$I_1=0$	-5 **250** 0	-3 **50 -Δ** 0	-2 **Δ** -3	-3 -1
$I_2=-1$	-8 2	-4 **400 + Δ** 0	-6 **100 -Δ** 0	-5 0
$I_3=3$	-2 0	-1 1	-2 **100** 0	-1 **500** 0

$$\Delta=\min\begin{cases}50-\Delta\\100-\Delta\end{cases}$$

$\Delta=50$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-5$	$J_2=0$	$J_3=-2$	$J_4=-1$
$I_1=0$	-5 **250 -Δ** 0	-3 3	-2 **50+Δ** -3	-3 2
$I_2=-4$	-8 -1	-4 450 0	-6 **50** 0	-5 0
$I_3=0$	-2 **Δ**	-1	-2 **100 -Δ**	-1 **500**



	-3	1	0	0

$\Delta = \min \begin{cases} 250 - \Delta \\ 100 - \Delta \end{cases}$

$\Delta = 100$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-5$	$J_2=0$	$J_3=-2$	$J_4=-4$
$I_1=0$	-5 **150 -Δ** 0	-3 3	-2 **150+Δ** 0	-3 -1
$I_2=-4$	-8 -1	4 450 0	-6 **50 -Δ** 0	-5 **Δ** -3
$I_3=3$	-2 **100 +Δ** 0	-1 4	-2 3	-1 **500 -Δ** 0

$\Delta = \min \begin{cases} \Delta - 150 \\ \Delta - 50 \\ \Delta - 500 \end{cases}$

$\Delta = 50$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-5$	$J_2=-3$	$J_3=-2$	$J_4=-4$
$I_1=0$	-5 **100 -Δ** 0	-3 0	-2 **200** 0	-3 **Δ** -1
$I_2=-1$	-8 2	-4 450 0	-6 3	-5 **50** 0
$I_3=3$	-2 **150 +Δ** 0	-1 1	-2 3	-1 **450 -Δ** 0

$\Delta = \min \begin{cases} 100 - \Delta \\ 450 - \Delta \end{cases}$

$\Delta = 100$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	J_1=-4	J_2=-2	J_3=-2	J_4=-3
I_1=0	-5 1	-3 1	-2 **200** 0	-3 **100** 0
I_2=-2	-8 2	-4 **450** 0	-6 2	-5 **50** 0
I_3=2	-2 **250** 0	-1 1	-2 2	-1 **350** 0

⇐ لا يمكن اجراء تخفيض للتكاليف لأن الاقتصاد ليس سالب ومنه توزع الكميات كما يلي:

المترشح (1) ينشط في المنطقة رقم (3) شرق و رقم (4) غرب بالميزانية التالية: 200 و 100 ألف على التوالي.

المترشح (2) ينشط في المنطقة رقم (2) جنوب و رقم (4) غرب بالميزانية التالية: 450 و 50 ألف على التوالي.

المترشح (3) ينشط في المنطقة رقم (1) شمال و رقم (4) غرب بالميزانية التالية: 250 و 350 ألف على التوالي.

2) **توزيع الأموال في حالة عجز المترشح رقم (2) عن توفير ديون الحملة :**يكون التوزيع كالتالي:

J / I	J_1=-5	J_2=-3	J_3=-3	J_4=0
I_1=0	-5 **250 - Δ** 0	-3 **50 + Δ** 0	-2 -1	-3 3
I_2=3	0 **Δ** -2	0 **400 - Δ** 0	0 **100** 0	0 3
I_3=1	-2 -2	-1 -1	-2 **100** 0	-1 **500** 0

تعتبر التكلفة المترشح الثاني معدومة.

$$\Delta = \min \begin{cases} 250 - \Delta \\ 180 \end{cases}$$

$400 - \Delta$

$\Delta = 250$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-3$	$J_2=-3$	$J_3=-3$	$J_4=0$
$I_1=0$	-5 2	-3 **300** 0	-2 -1	-3 3
$I_2=3$	0 **250** 0	0 **150 - Δ** 0	0 **100 + Δ** 0	0 3
$I_3=1$	-2 0	-1 **Δ** **-1**	-2 **100 - Δ** 0	-1 **500** 0

$\Delta = \min \begin{cases} 100 - \Delta \\ 150 - \Delta \end{cases}$

$\Delta = 100$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	$J_1=-3$	$J_2=-3$	$J_3=-2$	$J_4=-3$
$I_1=0$	-5 2	-3 **300 - Δ** 0	-2 **Δ** -1	-3 0
$I_2=3$	0 **250** 0	0 **50 + Δ** 0	0 **200 - Δ** 0	0 0
$I_3=2$	-2 1	-1 **100** 0	-2 1	-1 **500** 1

$\Delta = \min \begin{cases} 300 - \Delta \\ 200 - \Delta \end{cases}$

$\Delta = 200$

J / I	$J_1=-3$	$J_2=-3$	$J_3=-2$	$J_4=-3$

$I_1=0$	-5 2	-3 **100** 0	-2 **200** 0	-3 0
$I_2=3$	0 **250** 0	0 **250** 0	0 1	0 0
$I_3=2$	-2 1	-1 **100** 0	-2 2	-1 **500** 0

من خلال الجدول الأخير يصبح التوزيع كالتالي:

المترشح (1) ينشط في المنطقة رقم (2) والمنطقة رقم (3) بالميزانية التالية: 100 و 200 ألف على التوالي.

المترشح (3) ينشط في المنطقة رقم (2) والمنطقة رقم (4) بالميزانية التالية: 100 و 500 ألف على التوالي.

3) توزيع ميزانية المترشحين في حالة انقطاع الطريق رقم (3) للمترشح الأول:

يكون التوزيع كالتالي:

J / I	$J_1=-5$	$J_2=-3$	$J_3=-5$	$J_4=-4$
$I_1=0$	-5 **250** 0	-3 **50** 0	-50 45	-3 -1
$I_2=1$	-8 2	-4 **400 - Δ** 0	-6 **100 + Δ** 1	-5 0
$I_3=3$	-2 0	-1 **Δ** -1	-2 **100 - Δ** 0	-1 **500** 0

تعتبر التكلفة للخانة (3.1) كبيرة جدا وتأخذ القيمة 50 مثلا.

$$\Delta=\min\begin{cases}400-\Delta\\ 100-\Delta\end{cases}$$

$$\Delta=100$$

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	J_1=-5	J_2=-3	J_3=-5	J_4=-3
I_1=0	-5 **250 -Δ** 0	-3 **50 +Δ** 0	50 45	-3 0
I_2=-1	-8 2	-4 **300** 0	-6 **200** 0	-5 1
I_3=2	-2 **Δ** -1	-1 **100 -Δ** 0	-2 -1	-1 **500** 0

$$\Delta=\min\begin{cases}100-\Delta\\250-\Delta\end{cases}$$

Δ=100

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	J_1=-5	J_2=-3	J_3=-5	J_4=-4
I_1=0	-5 **150 -Δ** 0	-3 **150** 0	-50 45	-3 **Δ** -1
I_2=-1	-8 2	-4 **300** 0	-6 **200** 0	-5 0
I_3=3	-2 **100 +Δ** 0	-1 1	-2 0	-1 **500 -Δ** 0

$$\Delta=\min\begin{cases}150-\Delta\\500-\Delta\end{cases}$$

Δ=150

ومنه يصبح الجدول كالتالي:

J / I	J_1=0	J_2=-3	J_3=-5	J_4=-3
I_1=0	-5 5	-3 **150 - Δ** 0	-50 45	-3 **150+Δ** 0
I_2=-1	-8 7	-4 **300 + Δ** 0	-6 **200 - Δ** 0	-5 1
I_3=2	-2 **250**	-1	-2 **Δ**	-1 **-Δ350**

	0	0	-1		0

$$\Delta = \min \begin{cases} 150-\Delta \\ 200-\Delta \\ 350-\Delta \end{cases}$$

$\Delta=150$

J / I	$J_1=0$	$J_2=-2$	$J_3=-4$	$J_4=-3$
$I_1=0$	-5 0	-3 1	-50 46	-3 **300** 0
$I_2=-2$	-8 6	-4 **450** 0	-6 **50** 0	-5 0
$I_3=2$	-2 **250** 0	-1 1	-2 **150** 0	-1 **200** 0

من الجدول يكون التوزيع للميزانية للمترشحين كالتالي:

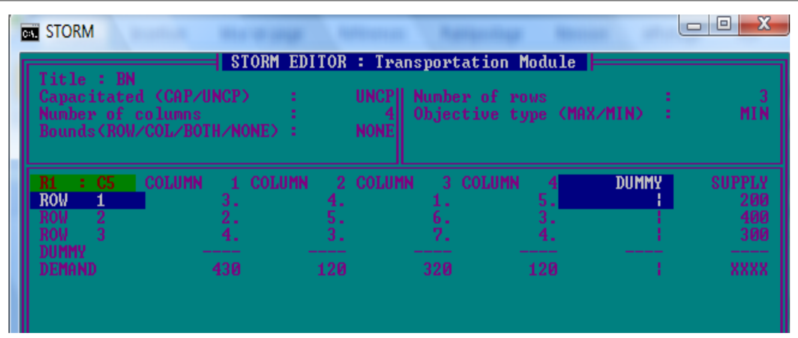
المترشح (1) ينشط في المنطقة رقم (4) بالميزانية قدرها 300 ألف.

المترشح (2) ينشط في المنطقة رقم (2) و(3) بالميزانية قدرها 450 و 50 ألف على التوالي.

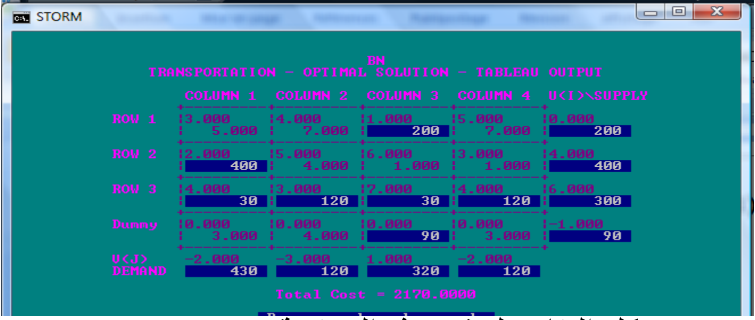
المترشح (3) ينشط في المنطقة رقم (1) و(3) و(4) بالميزانية قدرها 250 و 150 و 200 ألف على التوالي.

مثال محلول ببرمجية STORM:

تظهر المعطيات الخاصة بالمسألة في الصفحة التالية:



بعد التطبيق، نحصل على الحل النهائى كمايلى؛

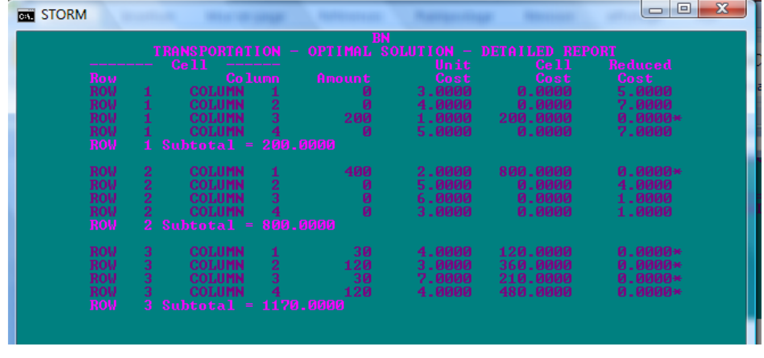


BN
TRANSPORTATION – OPTIMAL SOLUTION – TABLEAU OUTPUT

	COLUMN 1	COLUMN 2	COLUMN 3	COLUMN 4	U(I)\SUPPLY
ROW 1	3.000 / 5.000	4.000 / 7.000	1.000 / 200	5.000 / 7.000	0.000 / 200
ROW 2	2.000 / 400	5.000 / 4.000	6.000 / 1.000	3.000 / 1.000	4.000 / 400
ROW 3	4.000 / 30	3.000 / 120	7.000 / 30	4.000 / 120	6.000 / 300
Dummy	0.000 / 3.000	0.000 / 4.000	0.000 / 90	0.000 / 3.000	-1.000 / 90
U(J)	-2.000	-3.000	1.000	-2.000	
DEMAND	430	120	320	120	

Total Cost = 2170.0000

أو يمكن توضيح كل التفاصيل في هذه الصفحة:



BN
TRANSPORTATION – OPTIMAL SOLUTION – DETAILED REPORT

Row (Cell)	Column (Cell)	Amount	Unit Cost	Cell Cost	Reduced Cost
ROW 1	COLUMN 1	0	3.0000	0.0000	5.0000
ROW 1	COLUMN 2	0	4.0000	0.0000	7.0000
ROW 1	COLUMN 3	200	1.0000	200.0000	0.0000*
ROW 1	COLUMN 4	0	5.0000	0.0000	7.0000
ROW 1 Subtotal = 200.0000					
ROW 2	COLUMN 1	400	2.0000	800.0000	0.0000*
ROW 2	COLUMN 2	0	5.0000	0.0000	4.0000
ROW 2	COLUMN 3	0	6.0000	0.0000	1.0000
ROW 2	COLUMN 4	0	3.0000	0.0000	1.0000
ROW 2 Subtotal = 800.0000					
ROW 3	COLUMN 1	30	4.0000	120.0000	0.0000*
ROW 3	COLUMN 2	120	3.0000	360.0000	0.0000*
ROW 3	COLUMN 3	30	7.0000	210.0000	0.0000*
ROW 3	COLUMN 4	120	4.0000	480.0000	0.0000*
ROW 3 Subtotal = 1170.0000					

خاتمة

في ظل الظروف المتغيرة لا يمكن اتخاذ القرار بسهولة وسرعة وكفاءة في النتائج، نظرا للعمليات الحسابية الكثيرة والمعقدة والتي تستغرق وقتا مهما. أحيانا يتم التخطيط لفترات قريبة قد لا تتعدى بضعة أشهر، وأحيانا أخرى يمكن التخطيط بدرجة معقولة من الدقة بالظروف المستقبلية ولفترات أطول.

التنبؤات قصيرة المـ ... يري المؤسسات لا تتطلب تكاليفا كبيرة بالمقارنة مع ... ، والتي تحتاج إلى خبراء متخصصين وبرامج كمبيو ... ويمكن الاعتماد عليها في استخدام تلك الأساليب الكم ... يمكن التنبؤ كذلك باستخدام وتطبيق برامجية EXcel®.

أخرى يمكن التخطيط بدرجة معقولة من الدقة بالظروف المستقبلية ولفترات

إن برامج الكمبيوتر ... امج كبيرة وأشمل لإستخدام الأساليب الكمية في اتخاذ ال ... ل ذلك برامج: DSS FOR® /OM, P.O.M.S.QSB®. وقد تكون ضمن برامج معالجة الأساليب الإحصائية مثل MINITAB®, MICROSTAT®, SPSS®, STATISTICA. وهناك بعض البرامج المتخصصة وتعالج فقط أساليب التنبؤ بشكل تفصيلي، مثل: (DSSS) Business and Economic Forecasting ®

ونفس الشيء بالنسبة للقضايا الأخرى التي تناولناها في هذا المقياس. فمعظم مسائل بحوث العمليات ومنها البرمجة الخطية ومسألة النقل، متواجدة في برامج إعلام آلي ننصح القارئ بالبحث عنها والاستفادة منها.

قائمة المراجع

إليك بعض المراجع التي يمكن الاعتماد عليها في هذا المقياس:

1- دافيد أندرسون وآخرون، **الأساليب الكمية في الإدارة**، دار المريخ للنشر والتوزيع، المملكة العربية السعودية، 2006.

2- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**. اليازوري للنشر، عمان، 2008.

3- عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر، الأردن، 2006.

4- عبد الستار أحمد محمد الألوسي، **اساليب بحوث العمليات، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر والتوزيع، دبي، 2003 .

5- فاهيد لطفي، كان بيجلز، الترجمة سرور علي ابراهيم سرور، **نظم دعم القرارات لإدارة العمليات وبحوث العمليات**، دار المريخ للنشر والتوزيع. المملكة العربية السعودية ، 2007.

6- فتحي خليل حمدان ورشيق رفيق مرعي، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الرابعة، دار وائل للنشر، الأردن، 2004.

7- محمد توفيق ماضي، **الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات**، المكتب العربي الحديث، مصر، 1992.

8- محمد توفيق ماضي، **تخطيط ومراقبة الإنتاج مدخل اتخاذ القرارات**، المكتب العربي الحديث، مصر، 1992.

9- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.

10- منعم زمرير الموسوي، إتخاذ القرارات الإدارية – مدخل كمي - . الطبعة الأولى ، دار اليازوري للنشر و التوزيع ، عمان، 1998 .

11- محمد محمد كعبور، **أساسيات بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، أكاديمية الدراسات العليا، ليبيا، 2005.

1-Bernard W.Taylor. **Introduction to management science**, 7th ed. Prentice Hall, Inc. 2002.

2-Boualem Benmazouz, **Recherche opérationnelle de gestion**, Atlas éditions, Algerie. 1995.

3-Michel Nedzela, **Introduction à la science de gestion**, 2eme édition, Presse de l'université du Québec, 1984.

4-Vedrine J.P., **Techniques quantitatives de gestion**, éditions vuibert, Paris, 1985.

Logiciels :

1. STORM
2. WINQSB